Ю.И.Кулаков, Ю.С.Владимиров, А.В.Карнаухов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР И БИНАРНУЮ ГЕОМЕТРОФИЗИКУ

Т Ф С

Б Г Ф

Ю.И.Кулаков, Ю.С.Владимиров, А.В.Карнаухов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР И БИНАРНУЮ ГЕОМЕТРОФИЗИКУ

МОСКВА
"АРХИМЕД"
1992

УДК 530.12: 531.51: 539.12

Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С.,Карнаухов А.В.

Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику - М.: Издательство "Архимед" , 1992.- 182 с., ил. 27 рис.
ISBN 5-87550-003-4

Изложены основы теории физических структур, представляющей собой универсальую алгебраическую теорию отношений между элементами произвольной природы. Эта теория может быть построена на элементах одного множества (унарные структуры) или на элементах двух множеств (бинарные структуры). Унарные структуры соответствуют известным типам геометрий: евклидовым, псевдоевклидовым, симплектическим, римановым и другим. Физические структуры на двух множествах определяют новые, бинарные геометрии, которые применены для описания фундаментальных положений физики микромира. Охарактеризованы основные принципы и содержание бинарной геометрофизики - новой объединенной теории пространства-времени и физических взаимодействий, которая опирается на идеи теории бинарных структур, идеи прямого межчастичного взаимодействия Фоккера-Фейнмана и многомерных геометрических моделей типа теории Калуцы-Клейна. Показано, что эта теория описывает электрослабые и сильные взаимодействия.

Книга предназначена для широкого круга лиц, интересующихся основаниями геометрии и фундаментальными проблемами современной физики, студентов, преподавателей вузов и научных работников.

ISBN 5-87550-003-4
© Издательство "Архимед", 1992

РЕЦЕНЗИЯ

на работу Ю.И. Кулакова
"Методологическое введение в теорию физических структур"

В последние годы появляется немало работ, посвященных проблеме синтеза знания. Написанная в русле этой проблематики, работа Ю.И. Кулакова заметно выделяется как новизной своих методологических установок, так и безукоризненной строгостью и ясностью изложения.

Перед нами — качественно расширенное и углубленное понимание самой сути синтеза, отличающееся от традиционных подходов к этому вопросу, когда основа синтеза усматривается в непосредственном взаимодействии теорий, в появлении пограничных областей ("переходных мостиков") между ними. Конечно, весьма интересно исследование таких объектов как вирусы, находящиеся на пересечении интересов кристаллографа и биолога, или нейтронные звезды, парадоксальным образом входящие как в предмет астрофизики, так и метафизики. Однако тот факт, что в квантовой физике учитываются релятивистские эффекты, а в некоторых космологических приложениях теории относительности используется постоянная Планка, еще не свидетельствует о синтезе этих теорий, — перед нами их взаимопроникновение, которое может быть то весьма глубоким, то поверхностным и эпизодичным, но не выявление общих основ и принципов, объединяющих эти фундаментальные разделы физики. Установление синтеза "по горизонтали" — через непосредственные "взаимодействия" и "взаимопроникновения" теорий — есть занятие почетное, но трудоемкое и малокомпактное: при нынешней разветвленности знания оно, в лучшем случае, будет похоже на поверхностное наложение швов, которые все равно неуклонно расползаются, увеличивая хаотичность, несвязность и разрозненность различных аспектов знания.

Другой путь для синтеза — это "вертикальный" анализ теорий с целью нахождения некоторых фундаментальных инвариантов между ними, которые определяют гармонию мира и из которых дедуктивно могут выводиться принципы меньшей общности, лежащие в основании конкретных дисциплин.

Этот нелегкий путь и выбран Ю.И. Кулаковым, разработавшим теорию физических структур. Здесь уровень обобщения и интеграции физического знания поднят на новую высоту. Несомненно, что в сравнении с традиционным подходом это более "компактный" путь, причем "компактность понимается не столько в прагматическом, сколько в глубинно-онтологическом смысле: ставится вопрос о некотором предельном минимуме исходных структур, на которые с изяществом и естественностью могут быть отображены совершенно различные физические теории, традиционно понимаемые как имеющие собственную, автономную, суверенную основу и потому излагаемые в жестокой изоляции друг от друга.

Существование таких структур строго доказано в теории физических структур, — выявлены глубочайшие изоморфизмы и симметрии, позволяющие увидеть архитектонику физического знания в целом, а не в том стихийно-хаотическом разбросе, который у наиболее глубоко мыслящих физиков всегда оставлял впечатление дисгармонии и вызывал ощущение эстетической неудовлетворенности.

Теория физических структур безупречна в эстетическом отношении, — это не внешний лоск, а тонкое свидетельство глубины и истинности построений. Эстетические критерии для оценки теории в данном случае естественны и неизбежны, ибо антиутилитарный и антипрагматический подход Ю.И. Кулакова принципиально ориентирован на постижение мировой гармонии, упорядоченность бытия. В наш век дробно-практицизированного знания мы отвыкли от такой ориентации, корни которой уходят в пифагорейское мировоззрение, к идеалам универсального и математизированного знания.

В рамках теории физических структур по-новому осмысливается проблема единства мира, — у современных ученых еще силен искус решения этой проблемы в субстанциалистическом духе.

Однако не исчерпал ли себя этот подход? С точки зрения теории физических структур более перспективно искать не исходную "первоматерию", а исходные "первоструктуры", — такая переформулировка проблемы единства мира представляется нам несравненно более преимущественно и в логическом, и в естественно—научном отношении. Уже давно подмечено сходство уравнений, описывающих совершенно различные уровни бытия (Ньютон — Кулон, Больцман — Шеннон). Как можно объяснить этот замечательный изоморфизм уравнений с позиции субстанционализма? Если бы суб-

станционализм и проявил интерес к этой проблеме (а для него это не характерно), то в решении ее делс заведомо не обошлось бы без грубых натяжек. Однако в рамках теории физических структур эта интереснейшая проблема решается со всей полнотой, ибо здесь осуществляется переход от уровня уравнений к уровню фундаментальных структур; лежащие в их основе отношения могут изоморфно проявляться на разных уровнях организации материи, что и приводит к изумительной по своей красоте конвергенции уравнений.

Установки теории физических структур требуют принципиального отказа от наглядных представлений. Это требование у Ю.И. Кулакова приобретает силу едва ли не категорического императива. Для этого есть все основания. Очевидно, само понятие "наглядности" нуждается в определенном расчленении, — при широко понимаемом контексте к "наглядности" можно отнести и область конкретно-чувственного, и интуитивные представления, и представления, ориентированные на "видение" пластических эйдосов — "идей". Часто отказ от "наглядности" связан только с исключением чувственных образов. Но Ю.И.Кулаков идет дальше; вводя понятие физической структуры, он строит всю фундаментальную физику не прибегая к каким бы то ни было чувственным образам, умело перенося их в область "интерпретации". Проблема отказа от "наглядности" встала перед человеческим интеллектом и раньше. Так уже пифагорейская традиция осознавала необходимость перехода от пластического Эйдоса к чистому Логосу, однако "телесно-чувственная" природа греческой цивилизации помешала реализации этой программы, — европейская наука в каком-то смысле унаследовала это бремя "наглядности", в несении которого есть своя прелесть.

Необходимо отметить подлинную диалектичность в самом стиле мышления Ю.И. Кулакова. Его работы в этом отношении напоминают некоторые исследования А.А. Любищева, отмеченные блеском диалектического анализа, и в первую очередь — дополнительным исследованием "тез" и "антитез". Многие проблемы Ю.И.Кулаков формулирует как диалектически неизбежные антитезы, упускаемые из виду в тех случаях, когда "тезы" неправомерно претендуют на монополию. Так сама идея структурно-синтетического построения теории физических структур возникает как естественная антитеза к доминирующему в мышлении многих ученых субстанционально-аналитическому подходу.

То же самое можно сказать и о великолепной идее "феноменологической симметрии", основанной на непрерывных представлениях, она дополнительна по отношению к дискретно-групповым построениям, которые оттеснили и затенили идею непрерывности, нарушив необходимые здесь пропорции.

В этом плане особо отметим оригинальную идею “метаморфии”, выдвинутую Ю.И. Кулаковым как парное понятие к “структуре”.

Замечательно, что физик-структуралист, создатель теории физических структур, приходит к этой идее и глубоко разрабатывает ее! Это редкостный пример диалектической полноты и красоты мышления. Введение емкого понятия “метаморфии” позволило автору построить интересную классификацию наук, напоминающую непрерывный спектр — от предельной структуры к предельной метаморфии. Нет никаких сомнений, что метаморфия должна исследоваться столь же углубленно, как исследуются различные структуры. Нам еще неизвестны многие факторы, ответственные за генерацию метаморфии в мире. Исследования регулярности, повторяемости совершенно затенили интерес к проблеме несхожести, неповторимости, индивидуальности. Классически ясная постановка Ю.И.Кулаковым вопроса о соотношении структуры и метаморфии открывает широкое поле для исследований.

“Простота” и “ясность” — вот два эвристических и методологических критерия, положенных в основу построения теории физических структур. Эти классические критерии, которые могут показаться старомодными сейчас, когда “истинность” зачастую отождествляется с “парадоксальностью”, а теории становятся настолько “сумашедшими”, что это приводит к летальным для них исходам.

Оригинальность Ю.И. Кулакова выражается еще и в том, что он не только устанавливает “порог наглядности”, но и подводит нас к мысли о существовании “порога парадоксальности”, за которым, по всей вероятности, находится новый уровень Простоты и Гармонии.

Исследования Ю.И.Кулакова будут с интересом встречены не только физиками, — автор приходит к общезначимым для науки в целом результатам, к замечательным по своей глубине интегральным обобщениям, охватывающим все области знания.

Ясность мысли отражается в ясности языка автора, — работа написана великолепно. Публикацию рукописи можно только приветствовать.

Академик И.Е.Тамм
12 января 1970 года.

Содержание

Предисловие 6

Часть 1. Что такое теория физических структур

Глава 1.1. Истоки теории физических структур 9

§ 1.1. Физика как целостная система знаний 9
§ 1.2. Исходная задача 12
§ 1.3. Закон Ньютона — закон или определение? 14
§ 1.4. Предпосылки теории физических структур, содержащиеся в законе Ньютона 16
§ 1.5. Закон Ома — пример физической структуры ранга (3,2) 24
§ 1.6. Система эталонов и система координат на двух многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ 32
§ 1.7. Физическая структура ранга (r, s) на двух множествах 37

Глава 1.2. Основы теории физических структур на одном множестве 42

§ 1.8. Об одном замечании Эйнштейна 42
§ 1.9. Евклидова геометрия — пример физической структуры на одном множестве 44
§ 1.10. Система эталонов и система координат на одном многообразии $\mathfrak{M}$ 50
§ 1.11. Физическая структура ранга r на одном множестве . 54
§ 1.12. Некоторые общие выводы 64

Часть 2. Бинарные структуры и геометрофизика

Глава 2.1. Физические структуры и программа построения теории пространства–времени и физических взаимодействий 66

§ 2.1. Что такое теория физических структур 66
§ 2.2. Мотивы применения теории физических структур для построения физической картины мира 71
§ 2.3. Программа построения единой теории пространства–времени и физических взаимодействий 75

Глава 2.2. Бинарные структуры и основания теории классического пространства–времени 80

§ 2.4. Бинарная структура ранга (3,3;б) и ее физическая интерпретация 80
§ 2.5. Спиноры, биспиноры и прообраз уравнения Дирака . 84
§ 2.6. Структура ранга (2,2) и ее роль в физической картине мира 90
§ 2.7. Композиция структур рангов (2,2) и (3,3;б) и прообраз классического пространства–времени 96
§ 2.8. Динамический принцип для фермионов и квантовая механика 99

Глава 2.3. Описание электрослабых взаимодействий в рамках структуры ранга (4,4;а) 105

§ 2.9. Теория Калуцы–Клейна и принципы описания взаимодействий на примере структуры ранга (4,4;а) .105
§ 2.10. Переформулировка теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия в терминах структуры ранга (4,4;а) 110
§ 2.11. Модель электрослабых взаимодействий в терминах структуры ранга (4,4;а) 116
§ 2.12. Композиция структур рангов (2,2) и (4,4;а) и описание взаимодействующих частиц в классическом пространстве-времени 123

Глава 2.4. Описание сильно взаимодействующих частиц в рамках структур рангов (4,4;б) и (5,5;а) . . .128

§ 2.13. Бинарная структура ранга (4,4;б) и элементы хромодинамики 128
§ 2.14. Трехкомпонентные спиноры, 9–мерные векторы и гипотеза о 9–мерном пространстве–времени 134
§ 2.15. Структура ранга (5,5;а) и проблема "великого объединения" физических взаимодействий 138

Глава 2.5. Место бинарной геометрофизики среди других физических теорий и программ 142

Часть 3. Фейнмановский метод квантования и бинарная геометрофизика

Глава 3.1. Фейнмановские интегралы по траекториям для скалярных частиц 148

§ 3.1. Бинарная геометрофизика и фейнмановские методы в электродинамике 148
§ 3.2. Метод интегрирования по траекториям в квантовой механике 151

§ 3.3. Релятивистское описание скалярных частиц методом интегрирования по траекториям 155

Глава 3.2. Интегралы по траекториям для спинорных частиц и бинарная геометрофизика 158

§ 3.4. Проблема описания спинорных частиц 158
§ 3.5. Вывод уравнения Дирака из дискретного динамического принципа для свободной релятивистской частицы спина 1/2 161
§ 3.6. Описание взаимодействия фермионов с электромагнитным полем 168

Заключение 173

Приложение. Возникновение законов структур в некоторых матричных процессах специального вида . . .176

Литература 179

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга посвящена изложению основ теории физических структур, сформулированной Ю.И.Кулаковым, и бинарной геометрофизики, основанной Ю.С.Владимировым на базе бинарных физических структур и на синтезе идей многомерной теории Калуцы–Клейна и теории прямого межчастичного взаимодействия.

Теория физических структур Кулакова представляет собой алгебраическую теорию метрических отношений между элементами произвольной природы, нацеленную на переосмысление законов общей физики. В ее основе лежит феноменологическая (или фундаментальная) симметрия физических законов. Эта теория была сформулирована Ю.И.Кулаковым в Новосибирске примерно в 1966 году и впервые была опубликована в его книге "Элементы теории физических структур" в 1968 году [1]. Существенный вклад в развитие математического аппарата теории физических структур внес Г.Г.Михайличенко [2]; в частности, им были найдены все возможные виды физических структур с вещественными отношениями на двух множествах элементов (для так называемых бинарных структур). Другой ученик Кулакова, В.Х.Лев, получил важные результаты в теории физических структур на одном множестве элементов. Им были найдены все возможные законы для физических структур ранга 5 [3]. В терминах физических структур соответствующих рангов Ю.И.Кулаковым был переинтерпретирован ряд законов общей физики (2–й закон Ньютона, законы Ома, термодинамики и т.д.) и ряд геометрий. Основные идеи теории физических структур и найденные в группе Кулакова ее физические приложения изложены в первой части этой книги. Она написана Ю.И.Кулаковым.

Некоторое время теория физических структур развивалась лишь в Новосибирске. Затем этой теорией заинтересовались другие физики и математики. Появилась потребность в регулярных совещаниях

и дискуссиях. Летом 1984 года на берегу озера Баланкуль (вблизи г.Абакана) состоялась первая школа по теории физических структур, в которой приняли участие примерно 30 человек из Новосибирска, Москвы, Риги и других городов страны. С 1987 года школы по теории физических структур стали регулярными. Вторая (1987 г.), третья (1988 г.) и четвертая (1989 г.) школы состоялись в Пущино на Оке на базе Института Биофизики научного центра биологических исследований АН СССР. На этих школах собиралось примерно по 40 человек из разных городов страны. Кроме того, в промежутках между школами в Новосибирском университете проводились более узкие рабочие совещания по проблемам теории физических структур и применениям теории.

После летней школы на Баланкуле в 1984 году к исследованиям по теории физических структур присоединился другой автор этой книги, Ю.С.Владимиров. До этого он занимался проблемами аксиоматизации теории относительности [4], совмещения принципов общей теории относительности и квантовой теории [5], многомерными геометрическими теориями физических взаимодействий [6] и теорией прямого межчастичного взаимодействия [7]. Теория физических структур Кулакова оказалась очень удачным средством для объединения и развития всех из перечисленных здесь работ. Все предыдущие исследования убедили автора в том, что дальнейшие продвижения в разработке фундаментальных проблем физики должны опираться на радикальное изменение основных принципов теории пространства–времени и физических взаимодействий. Поскольку вся физика имеет дело ни с чем иным, как с различными отношениями между физическими объектами, а теория физических структур есть универсальная теория отношений, то естественно было положить некие простейшие из физических структур в основу нового подхода к теории пространства–времени и физических взаимодействий. Таковыми являются структуры на двух множествах — иерархия бинарных структур низшего ранга. При этом пришлось обобщить структуры Кулакова на случай комплексных отношений. Так возникла идея построения единой теории пространственно–временных отношений и физических взаимодействий, названная автором бинарной геометрофизикой. Элементы такой теории были впервые опубликованы Ю.С.Владимировым в 1988 году [8,9], а результаты исследований в виде самостоятельной физической парадигмы были доложены в 1989 году на школе ТФС–4 в Пущино и на ряде других конференций и совещаний. Основные идеи и результы бинарной геометрофизики изложены во второй части этой книги, написанной Ю.С.Владимировым.

Параллельно с проблемами многомерия и теории физических структур на физическом факультете МГУ в группе Ю.С.Владимирова изучались фейнмановские методы описания взаимодействий и квантования посредством континуального интегрирования. Третий автор данной книги, А.В.Карнаухов, нашел обобщение фейнмановского метода квантования на случай спинорных частиц, как свободных, так и электромагнитно взаимодействующих [10]. Анализ этого результата показал, что он имеет самое непосредственное отношение к бинарной геометрофизике, являясь необходимым звеном для перехода от понятий бинарных физических структур к известным уравнениям Дирака в координатном пространстве–времени. Эти результаты изложены А.В.Карнауховым в третьей части книги.

Следует подчеркнуть, что данная книга отражает состояние исследований по теории физических структур и возникшей на ее основе бинарной геометрофизики на время проведения четвертой школы (ТФС–4) в октябре 1989 года в Пущино.

Ю.И.Кулаков, Ю.С.Владимиров, А.В.Карнаухов

ЧАСТЬ 1

ЧТО ТАКОЕ ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

С самого начала проявилось стремление найти для унификации всех отраслей науки теоретическую основу, образованную минимальным числом понятий и фундаментальных соотношений, из которых логическим путем можно было бы вывести все понятия и соотношения отдельных дисциплин. Вот что мы понимаем под поиском фундамента для физики в целом. Глубокое убеждение в достижимости этой цели является главным источником страстной преданности, которая всегда вооду-
шевляет исследователя.

Альберт Эйнштейн

ГЛАВА 1.1

ИСТОКИ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

§ 1.1. Физика как целостная система знаний

Среди многочисленных попыток обнаружить единую математическую структуру различных физических законов лишь одна, в какой-то степени, увенчалась успехом и может претендовать на название универсального принципа. Это — хорошо известный принцип Гамильтона, взятый в качестве объединяющего начала в фундаментальном курсе теоретической физики Ландау и Лифшица.

Что же касается более частных областей физики, то здесь найдено достаточно большое число математических структур, объединяющих между собой различные разделы физики. Так, например, еще давно обнаружена единая математическая структура электрического

и магнитного поля (тензор электромагнитного поля), света и электромагнитных явлений (уравнения Максвелла), геометрии и гравитационного поля (общая теория относительности), квантовой и релятивистской механики (квантовая электродинамика) и уже совсем недавно обнаружена единая структура слабых и электромагнитных взаимодействий — теория Вайнберга–Салама–Глешоу.

В 1968 году мною был сформулирован новый взгляд на природу и математическую структуру фундаментальных физических законов и основных физических величин и понятий [1]—[11]. Суть его в самых общих чертах состоит в следующем.

Начиная с Галилея и по настоящее время, как правило, физика строится и излагается *индуктивно*, т.е. из огромного множества наблюдений и опытных фактов выбирается небольшое число свойств и вырабатываются основные понятия, в терминах которых формулируется физическая теория. Я предлагаю *дедуктивный* путь построения физики. Для его реализации мною была предложена некоторая чрезвычайно простая математическая схема. Эта схема оказалась весьма эффективной при установлении природы фундаментальных физических законов и введении в теорию основных физических величин и понятий, и потому я назвал ее "теорией физических структур".

Как известно, Н.Бурбаки предложили программу построения математики как целостной системы знаний. Ими было показано, что в основании математики лежат три независимые порождающие структуры — алгебраическая, топологическая и структура порядка [12].

Аналогичная задача "бурбакизации" может быть поставлена и в физике (задача построения физики как целостного знания). Смысл ее состоит в том, чтобы свести все многообразие фундаментальных физических законов, понятий и величин к одной универсальной физической структуре, имеющей смысл особой скрытой симметрии мира физических объектов.

Физика представляет собой сложную иерархическую систему фундаментальных физических законов и понятий, основных уравнений и общефизических принципов, наблюдаемых и ненаблюдаемых физических величин, равновесных и неравновесных процессов. В самом ее основании лежат фундаментальные физические законы, порождающие достаточно богатый набор исходных физических величин и понятий, таких, как, например, пространство и время, масса и сила, температура, энтропия, электрический заряд, сопротивление и т.п. Используя эти понятия и физические величины как исходный строительный материал, оказалось возможным сделать следующий шаг — сформулировать исходные динамические уравнения. Эти уравнения играют в физике настолько важную роль, что возникает соб-

лазн сказать, что вся механика заключена в уравнениях Ньютона, электродинамика — в уравнениях Максвелла, теория тяготения — в уравнении Эйнштейна, нерелятивистская квантовая механика — в уравнении Шредингера, релятивистская квантовая механика — в уравнении Дирака и т.д. Однако, сводя содержание различных разделов физики к соответствующим уравнениям, мы, сами того не замечая, рискуем лишить физику ее подлинного содержания, ибо главное содержание физики, как теперь выясняется, нужно искать не на уровне уравнений, а на более глубоком уровне — уровне фундаментальных физических законов, понятий и специфических физических величин, порождаемых особым видом симметрии системы физических объектов.

Заметим, что динамические уравнения получают неожиданную свежесть, появляясь заново совсем в другом аспекте.

Дело в том, что современная теория элементарных частиц, основанная на квантовой механике, во главу угла поставила ту часть квантовой теории, которая раньше занимала лишь подчиненное место. Речь идет о теории групп. В обычной квантовой теории группы симметрии играли лишь вспомогательную роль: в основе теории лежало "динамическое уравнение" (уравнение Шредингера или уравнение Дирака), которое в определенных условиях оказывалось инвариантным относительно некоторой группы преобразований. Считалось, что уравнения в принципе могли бы быть решены и без групп, а группы рассматривались лишь как математический метод, позволяющий извлекать частичную информацию о квантовой системе без интегрирования уравнений.

Развитие теории элементарных частиц в последние годы обратило, в известном смысле, соотношение между уравнениями движения и группами симметрии. Теперь симметрия выступает на передний план, так как оказалось, что представления соответствующих групп несут в себе самую фундаментальную информацию о системе. Таким образом, симметрия оказывается первичным, наиболее глубоким инструментом для физического описания природы. Эта точка зрения на соотношение между уравнениями движения и группами симметрии заимствована мною из книги Ю.Б.Румера и А.И.Фета "Теория унитарной симметрии" [13].

Но предлагаемая мною теория физических структур в определенном смысле идет дальше, так как в ее основании лежит новый тип симметрии, имеющий место в мире самых различных физических объектов. Эта симметрия, названная *феноменологической*, позволяет совершенно по-новому взглянуть на само понятие физического закона и на сам факт существования групп преобразований, играющих такую важную роль в современной теоретической физике.

Что же представляет собой физика в целом?

По отношению к физике можно задать тот же вопрос, который задают Н.Бурбаки по отношению к математике: "Является ли это обширное разрастание развитием крепко сложенного организма, который с каждым днем приобретает все больше и больше согласованности и единства между своими вновь возникающими частями, или, напротив, оно является только внешним признаком тенденции к идущему все дальше и дальше распаду, обусловленному самой природой математики... Одним словом, существует в настоящее время одна математика или несколько математик?" [14].

Поиск ответа на этот вопрос составляет предмет уже не физики, а специфической области знания, которую по аналогии с математикой можно было бы назвать "метафизикой" или, более традиционно,— "основаниями физики", что привело меня в 1968 году к созданию теории физических структур [15], [16].

§ 1.2. Исходная задача

Первоначальная задача, из которой возникла теория физических структур, выглядела весьма скромно — выяснить, в какой степени второй закон механики Ньютона является экспериментально проверяемым физическим законом, а в какой — определением силы, массы и инерциальной системы отсчета.

При этом возникла необходимость дать такие определения исходным понятиям (силе, массе, инерциальной системе отсчета), которые, в отличие от туманных, расплывчатых и неконструктивных определений вроде "масса есть мера инерции, а сила — мера механического действия" или "инерциальная система отсчета — это такая система, в которой справедливы законы Ньютона" [17], были бы конструктивны, логически безупречны и позволяли бы определить численные значения вводимых физических величин экспериментальным путем.

Цель была достигнута: выяснилось, что второй закон механики Ньютона является одновременно и экспериментально проверяемым физическим законом (в форме соотношения между четырьмя ускорениями $w_{i\alpha}$, $w_{i\beta}$, $w_{k\alpha}$, $w_{k\beta}$, относящимися к двум произвольным телам i и k и к двум произвольным акселераторам *) α и β:

---

*) Под акселераторами (ускорителями) мы будем понимать всевозможные поля или ускоряющие механизмы, сообщающие телам определенные ускорения.

$$w_{i\alpha}w_{k\beta} - w_{i\beta}w_{k\alpha} = 0\,.$$

Однако, как это иногда бывает, наряду с решением поставленной весьма частной задачи было получено нечто гораздо большее.

Оказалось, что ход рассуждений, с помощью которого удалось получить индивидуальную характеристику тела — массу m_i и акселератора — силу f_α, исходя лишь из взаимных отношений между ними, может быть перенесен и на другие фундаментальные физические законы. Более того, оказалось, что за таким хорошо известным еще со школы законом, как второй закон Ньютона, стоит целая неисследованная область *системных* (коллективных, полиарных) *отношений* между физическими объектами различной природы, порождающих, в частности, фундаментальные физические и геометрические законы.

Возникающая при этом теория, названная мною *теорией физических структур*, исходит из хорошо известных физических законов и основных уравнений и выделяет из них нечто общее, универсальное, присущее всем фундаментальным физическим законам независимо от конкретной "физической природы" изучаемых объектов и используемых при этом измерительных приборов.

Оказывается, что с каждым фундаментальным физическим законом тесно связан определенный тип устойчивых отношений (физическая структура определенного ранга), не зависящий ни от "физической природы" изучаемого физического объекта, ни от выбора конкретного измерительного прибора.

Строгая математическая формулировка понятия физической структуры делает возможным изучение общих свойств физических законов до их конкретной физической интерпретации, подобно тому, как абстрактные методы элементарной алгебры позволяют решать конкретные школьные задачи, взятые из реальной действительности.

Именно, теория физических структур позволяет обнаружить глубокое единство самых различных разделов физики. Опираясь на методы, разработанные в рамках этой теории, можно показать, что такие, внешне не похожие друг на друга разделы физики, как механика, специальная теория относительности, феноменологическая электродинамика, теория электрических цепей, равновесная термодинамика как бы вырастают из единого корня, реализуя тем самым физические структуры различных рангов [18].

Поскольку, как отмечалось выше, понятие физической структуры возникло при анализе второго закона механики Ньютона, рассмотрим его более подробно.

§ 1.3. Закон Ньютона — закон или определение?

Начнем с анализа понятия "физического закона". Поводом для такого анализа служит та неопределенность, которая до сих пор остается при трактовке второго закона механики Ньютона

$$mw = f,$$

закона Ома

$$I = \frac{U}{R},$$

известного соотношения электростатики

$$F = qE$$

и целого ряда других подобных соотношений: является ли каждое из выписанных соотношений "физическим законом" или определением, соответственно, силы f, сопротивления R, напряженности электрического поля E?

Заметим, что никаких проблем не возникает, когда речь идет о зависимости, например, давления реального газа P от его объема V при постоянной температуре. Здесь совершенно ясно, что имеет место простейший "физический закон" — связь между двумя независимо определенными, измеряемыми на опыте физическими величинами P_i и V_i, относящимися к различным состояниям i реального газа

$$P_i = P(V_i).$$

Когда же речь заходит о законе Ньютона $f = mw$ или о соотношении $F = qE$, ситуация сильно осложняется тем, что, строго говоря, хорошо определенной и измеряемой на опыте величиной является лишь ускорение w в первом случае и сила F, действующая на заряд в электрическом поле,— во втором. Что же касается силы f и массы m в первом случае и электрического заряда q и напряженности электрического поля E — во втором [*)], то вопрос об их независимом определении представляется не таким простым, как это может показаться на первый взгляд.

Вот что писал по поводу изложения механики Генрих Герц: "Кажется почти невозможным сама мысль искать логические несовер-

---

*) При последовательном (иерархическом) построении физики мы можем считать, что в электростатике понятие силы заимствуется из механики, где оно уже определено. Поэтому в законе $F = qE$ можно рассматривать F как хорошо определенную величину.

шенства в системе, которая разработана лучшими умами. Но прежде чем отказаться от дальнейшего исследования, следует спросить, все ли, в том числе и лучшие умы, были удовлетворены этой системой... По моему мнению, прежде всего надо указать на то, что как раз введение в механику очень трудно излагать вдумчивым слушателям, не ощущая при этом необходимости то тут, то там приносить этим слушателям, конечно, не без некоторого смущения, извинения и не испытывая желания побыстрее перейти от введения к примерам, которые говорят сами за себя" [10].

Стараясь объяснить, почему Герц не был удовлетворен изложением механики в рамках классической системы, Анри Пуанкаре писал: "Прежде всего мы оказываемся перед трудностями, когда хотим дать определение основным понятиям. Что такое масса? "Это,— отвечает Ньютон, — произведение объема на плотность". — "Лучше было бы сказать, — отвечают Томсон и Тэт,— что плотность есть количество массы в единице объема". — Что такое сила? "Это, — скажет Лагранж, — причина,которая производит движение тела или которая стремится произвести движение". — "Это, — отвечает Кирхгоф, — произведение массы на ускорение". Но тогда почему не сказать, что масса есть количество силы, рассчитанной на единицу ускорения? Эти затруднения непреодолимы. Когда говорят, что сила есть причина движения, — это метафизика, и это определение, если бы пришлось довольствоваться им, оказалось бы совершенно бесплодным. Чтобы определение могло быть полезным, оно должно научить измерять силу; впрочем, этого достаточно, нет никакой необходимости, чтобы оно объясняло, что такое сила в себе и что она является причиной или следствием движения. Итак, мы возвращаемся к определению Кирхгофа: сила равна массе, умноженной на ускорение. На этот "закон Ньютона" перестают, в свою очередь, смотреть как на экспериментальный закон, он становится только определением. Но это определение также недостаточно, потому что мы не знаем, что такое масса... Не остается ничего, и наши усилия были бесплодны, — мы оказались перед необходимостью прибегнуть к следующему определению, которое, по существу, является признанием нашего бессилия: массы представляют собой коэффициенты, которые удобно вводить в вычисления (см. [20]. — Ю.К.)... Мы должны сделать вывод, что при помощи классической системы невозможно дать удовлетворительную идею о силе и массе" [21].

Итак, трудности, возникшие при попытке строгого определения понятий массы, силы, инерциальной системы отсчета, не являются случайными. Как показали работы Герца, Кирхгофа, Гельмгольца, Пуанкаре, эти трудности носят принципиальный характер. Для их преодоления необходимо выйти за рамки существующей парадигмы.

Но чтобы это сделать, необходимо создать новую концептуальную систему, в основании которой лежали бы новые конструктивные понятия и принципы.

Обратимся к ее истокам и проиллюстрируем основные понятия и принципы этой новой концептуальной системы тремя следующими примерами, рассмотрение которых в 1961—1965 годах привело меня к формулировке общего *принципа феноменологической симметрии*, лежащего в основании теории физических структур.

§ 1.4. Предпосылки теории физических структур, содержащиеся в законе Ньютона

Рассмотрим второй закон механики Ньютона в его традиционной форме:

$$mw = f \tag{1.4.1}$$

Входящие в него физические величины — масса m и сила f, с одной стороны, и ускорение w — с другой, имеют, вообще говоря, различную математическую природу. Так, масса m зависит от ускоряемого тела i и не зависит от акселератора α, сообщающего телу i ускорение w; сила f, напротив, зависит от акселератора α и не зависит от тела i. Что же касается ускорения w, то оно зависит как от тела i, так и от акселератора α.

Таким образом, масса m_i является некоторой вещественной функцией одной нечисловой переменной — тела i, т.е.

$$m : \mathfrak{M} \to \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{M} = \{i,k,\ldots\}$ — множество всех ускоряемых тел $i,k,\ldots$;

$\mathfrak{R}$ — множество вещественных чисел;

сила f_α является другой вещественной функцией *одной* нечисловой переменной — акселератора α, т.е.

$$f : \mathfrak{N} \to \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta,\ldots\}$ — множество всех акселераторов $\alpha, \beta,\ldots$;

ускорение же $w_{i\alpha}$ является вещественной функцией двух нечисловых переменных — тела i и акселератора α, т.е.

$$w : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathfrak{R}$$

Итак, специально выделяя независимые нечисловые переменные $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, перепишем закон Ньютона (1.4.1) в виде:

$$m_i w_{i\alpha} = f_\alpha \qquad (1.4.2)$$

Таким образом, закон Ньютона, записанный в виде (1.4.2), представляет собой связь между существенно разнородными физическими величинами:

одноиндексными массой m_i и силой f_α — с одной стороны и *двухиндексным* ускорением $w_{i\alpha}$ — с другой, т.е.

$$w_{i\alpha} = w(m_i, f_\alpha) = \frac{f_\alpha}{m_i}.$$

Обратим внимание на то, что тело i характеризуется *одним* ($m = 1$) параметром — массой m_i, и акселератор α характеризуется *одним* [*)] ($n = 1$) параметром — силой f_α. Другими словами, и множество тел $\mathfrak{M}$, и множество акселераторов $\mathfrak{N}$ — одномерны.

Назовем соотношение

$$w_{i\alpha} = y_i \eta_\alpha, \qquad (1.4.3)$$

где $y_i = 1/m_i$, $\eta_\alpha = f_\alpha$

канонической формой второго закона механики Ньютона.

Заметим, что, строго говоря, единственными измеряемыми величинами в механике являются координата, время, скорость и, в конечном итоге, ускорение. В связи с этим перепишем закон Ньютона (1.4.2) в виде, не содержащем ни массы m_i, ни силы f_α. Чтобы исключить все массы и силы, нужно взять, по крайней мере, два ($r = 2$) тела i и k и два ($s = 2$) акселератора α и β и записать четыре ($r \times s = 2 \times 2$) равенства

$$\begin{aligned} w_{i\alpha} &= f_\alpha / m_i \qquad & w_{i\beta} &= f_\beta / m_i \\ w_{k\alpha} &= f_\alpha / m_k \qquad & w_{k\beta} &= f_\beta / m_k, \end{aligned} \qquad (1.4.4)$$

содержащие четыре ($N = mr + ns = 4$) неизвестных $m_i, m_k, f_\alpha, f_\beta$.

Здесь и в дальнейшем через r и s мы будем обозначать то минимальное число элементов, которое нужно взять соответственно из множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, чтобы исключить из соответствующей системы уравнений все параметры $y_1(i), \ldots, y_m(i)$, характеризующие элемент $i \in \mathfrak{M}$, и все параметры $\eta^1(\alpha), \ldots, \eta^n(\alpha)$, характеризующие элемент $\alpha \in \mathfrak{N}$.

---

*) Имеется в виду простейший случай одномерного движения.

Пару (r, s) мы будем называть *рангом* физической структуры, а пару (m, n) — *размерностью* множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Итак, мы имеем четыре уравнения (1.4.4), содержащих четыре неизвестных $m_i, m_k, f_\alpha, f_\beta$. Особенность этой системы уравнений состоит в том, что из нее можно исключить все неизвестные $m_i, m_k, f_\alpha, f_\beta$, получив при этом одно соотношение между $w_{i\alpha}, w_{i\beta}, w_{k\alpha}, w_{k\beta}$, но нельзя выразить $m_i, m_k, f_\alpha, f_\beta$ через ускорения $w_{i\alpha}, w_{i\beta}, w_{k\alpha}, w_{k\beta}$.

Таким образом, исключая из написанных *четырех* уравнений (1.4.4) *четыре* неизвестные $m_i, m_k, f_\alpha, f_\beta$, получаем следующее соотношение между четырьмя ускорениями:

$$w_{i\alpha}w_{k\beta} - w_{i\beta}w_{k\alpha} = 0. \tag{1.4.5}$$

Примечательно, что закон Ньютона, записанный в виде (1.4.5), имеет явно выраженный универсальный характер, так как не зависит ни от выбора *двух* тел $i, k \in \mathfrak{M}$, ни от выбора *двух* акселераторов $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$, т.е.

$$\forall\, i, k \in \mathfrak{M}; \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathfrak{N};$$

$$\Phi \begin{pmatrix} w_{i\alpha}, w_{i\beta} \\ w_{k\alpha}, w_{k\beta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} w_{i\alpha} & w_{i\beta} \\ w_{k\alpha} & w_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.4.6}$$

Соотношения (1.4.5) и (1.4.6) мы будем называть вторым законом механики Ньютона в *феноменологически инвариантной* форме.

Подчеркнем, что эти соотношения не содержат ничего, кроме измеряемых на опыте ускорений и могут быть подвергнуты непосредственной экспериментальной проверке.

Итак, мы получили фундаментальное соотношение (1.4.6) как достаточно тривиальное следствие из закона Ньютона, записанного в канонической форме (1.4.3). Но при этом существенно, что здесь возможен и обратный переход — приняв в качестве исходного опытный факт существования соотношения (1.4.6) между четырьмя измеряемыми на опыте ускорениями $w_{i\alpha}, w_{i\beta}, w_{k\beta}, w_{k\alpha}$, мы можем снова получить отсюда второй закон механики Ньютона в канонической форме (1.4.3).

Действительно, назовем одно из тел (например, тело k) и один из акселераторов (например, акселератор β) эталонными и переобозначим их, соответственно, через $\underline{1}$ и $\bar{1}$. Полагая в (1.4.5) $k = \underline{1}, \beta = \bar{1}$, будем иметь:

$$w_{i\alpha} = \frac{w_{i\bar{1}} \cdot w_{\underline{1}\alpha}}{w_{\underline{1}\bar{1}}} = \frac{w_{i\bar{1}}}{C_1} \cdot \frac{w_{\underline{1}\bar{1}}}{w_{\underline{1}\bar{1}}} \cdot C_1 \cdot \frac{w_{\underline{1}\alpha}}{w_{\underline{1}\bar{1}}}, \tag{1.4.7}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Сравнивая (1.4.7) с (1.4.3), получим второй закон механики Ньютона в канонической форме

$$w_{i\alpha} = y_i \eta_\alpha = f_\alpha / m_i,$$

если положим

$$y_i = 1/m_i = \frac{w_{11}^-}{C_1} \cdot \frac{w_{11}^-}{w_{\underline{11}}^-};$$

$$\eta_\alpha = f_\alpha = C_1 \cdot \frac{w_{1\alpha}}{w_{\underline{11}}^-}.$$

Постоянная C_1 (и аналогичные постоянные в других случаях) существенно связана с выбором системы единиц и обеспечивает таким образом определенную свободу выбора значений массы и силы. Формально постоянная C_1 возникает из-за того, что y_i и η_α не определяются однозначно, так как существует однопараметрическая группа преобразований

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{1}{C_1} \cdot y; \\ \bar{\eta} = C_1 \eta; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \bar{m} = C_1 m; \\ \bar{f} = C_1 f, \end{cases}$$

сохраняющая вид выражения

$$w_{i\alpha} = y_i \eta_\alpha = \bar{y}_i \bar{\eta}_\alpha$$

или

$$w_{i\alpha} = f_\alpha / m_i = \bar{f}_\alpha / \bar{m}_i.$$

Итак, мы показали, что второй закон механики Ньютона может быть записан в двух эквивалентных формах:

в канонической

$$w_{i\alpha} = \varphi\,(y_i, \eta_\alpha) = y_i \eta_\alpha = f_\alpha / m_i$$

и в феноменологически инвариантной

$$\Phi \begin{pmatrix} w_{i\alpha}, w_{i\beta} \\ w_{k\alpha}, w_{k\beta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} w_{i\alpha} & w_{i\beta} \\ w_{k\alpha} & w_{k\beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Другими словами, мы можем сказать, что ускорение $w_{i\alpha}$ произвольного тела i под действием произвольного акселератора α зависит от ускорения $w_{i\beta}$ тела i под действием эталонного акселератора

β, от ускорения $w_{k\alpha}$ эталонного тела k под действием акселератора α и, наконец, от ускорения $w_{k\beta}$ эталонного тела k под действием акселератора β (см. рис.1).

Опираясь на рассмотренный пример, сформулируем понятие *физической структуры ранга* (2,2).

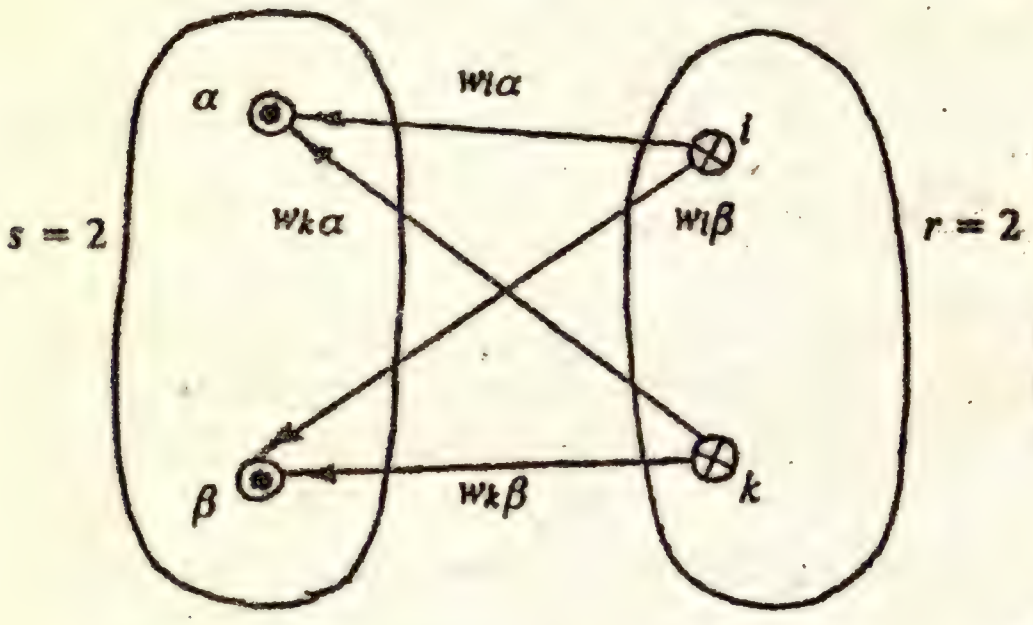


Рис. 1. Физическая структура ранга (2,2) на двух множествах; диаграмма отношений между физическими объектами.

Рассмотрим два множества

$$\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$$

и

$$\mathfrak{A} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$$

и, соответственно, два отображения

$$u : \mathfrak{M} \to \mathfrak{R}$$

$$i \mapsto y(i)$$

и

$$v : \mathfrak{A} \to \mathfrak{R}$$

$$\alpha \mapsto \eta(\alpha).$$

Мы будем говорить, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{A}$ размерности (1,1) определена физическая структура ранга (2,2), если существует вещественная функция двух вещественных переменных

$$\varphi : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \to \mathfrak{R};$$

$$y, \eta \mapsto \varphi(y, \eta),$$

такая, что четыре функции

	η_1	η_2
y_1	$\varphi(y_1, \eta_1)$	$\varphi(y_1, \eta_2)$
y_2	$\varphi(y_2, \eta_1)$	$\varphi(y_1, \eta_2)$

образованные с помощью одной-единственной функции $\varphi(y, \eta)$ путем всевозможной замены переменных y и η на новые независимые переменные

$$y = (y_1, y_2)$$

$$\eta = (\eta_1, \eta_2),$$

связаны между собой соотношением

$$\Phi \begin{pmatrix} \varphi(y_1, \eta_1), & \varphi(y_1, \eta_2) \\ \varphi(y_2, \eta_1), & \varphi(y_2, \eta_2) \end{pmatrix} = 0, \tag{1.4.8}$$

представляющим собой тождество относительно независимых переменных $y_1, y_2; \eta_1, \eta_2$.

Не случайно в этом определении физической структуры ничего не говорится о "физической природе" элементов из множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Важно лишь, что каждый элемент i из множества $\mathfrak{M}$ характеризуется каким-либо *одним* числовым параметром y_i, а элемент α из множества $\mathfrak{N}$ — каким-либо *одним* числовым параметром η_α. Далее существенно, что существует какая-то (заранее неизвестная) непрерывная, достаточно число раз дифференцируемая функция $\varphi(y_i, \eta_\alpha)$, характеризующая парные отношения между элементами $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$. И наконец, самое главное, чтобы ее значения:

$$\varphi(y_i, \eta_\alpha), \varphi(y_i, \eta_\beta),$$

$$\varphi(y_k, \eta_\alpha), \varphi(y_k, \eta_\beta)$$

были бы связаны между собой какой-то (тоже заранее неизвестной) функциональной зависимостью:

$$\Phi\left(\varphi(y_i, \eta_\alpha), \varphi(y_i, \eta_\beta), \varphi(y_k, \eta_\alpha), \varphi(y_k, \eta_\beta)\right) = 0,$$

тождественной относительно переменных $y_i, y_k; \eta_\alpha, \eta_\beta$,

где $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

непрерывная, достаточное число раз дифференцируемая функция четырех переменных, градиент которой отличен от нуля.

Оказывается, и это составляет основное содержание и весь пафос теории физических структур, эти весьма общие требования фактически однозначно (с точностью до строго определенной эквивалентности) определяют конкретный вид функции φ и Φ, в свою очередь определяющих еще до всякой физической интерпретации единственно возможную каноническую и феноменологически инвариантную форму физического закона.

Это обстоятельство открывает перед теоретической физикой новые возможности, позволяя свести все мыслимые физические законы к небольшому числу фундаментальных физических законов, вид ко-

торых определяется требованием феноменологической инвариантности.

Итак, задача состоит в том, чтобы найти неизвестные функции

$$\varphi(y, \eta) \quad \text{и} \quad \Phi\begin{pmatrix}\varphi_{11}, \varphi_{12}\\ \varphi_{21}, \varphi_{22}\end{pmatrix},$$

обращающие равенство (1.4.8) в тождество относительно всех независимых переменных $y_i, y_k; \eta_\alpha, \eta_\beta$.

Собственно говоря, теория физических структур и началась с решения этой задачи.

Определим теперь понятие эквивалентности двух функций $m + n$ переменных.

Две функции *)

$$A(x_1, \ldots, x_m; \xi^1, \ldots, \xi^n)$$

и

$$B(y_1, \ldots, y_m; \eta^1, \ldots, \eta^n)$$

мы будем считать *эквивалентными*, если существуют такие функции относительно двух неизвестных функций $\varphi : \mathfrak{R}^2 \to \mathfrak{R}$ и $\Phi : \mathfrak{R}^4 \to \mathfrak{R}$

$\rho : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$	$\rho^{-1} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$
$a : \mathfrak{R}^m \to \mathfrak{R}^m$ $x_1, \ldots, x_m \mapsto y_i = a_i(x_1, \ldots, x_m)$	$a^{-1} : \mathfrak{R}^m \to \mathfrak{R}^m$ $y_1, \ldots, y_m \mapsto x_i = a_i^{-1}(y_1, \ldots, y_m)$
$\alpha : \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n$ $\xi^1, \ldots, \xi^n \mapsto \eta^k = \alpha^k(\xi^1, \ldots, \xi^n)$	$\alpha^{-1} : \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n$ $\eta^1, \ldots, \eta^n \mapsto \xi^k = \alpha_k^{-1}(\eta^1, \ldots, \eta^n)$

что имеют место тождества:

$$A(x_1, \ldots; x_m; \xi^1, \ldots, \xi^n) \equiv$$

$$\equiv \rho\left(B\left(a_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, a_m(x_1, \ldots, x_m);\right.\right.$$

$$\left.\left.\alpha^1(\xi^1, \ldots, \xi^n), \ldots, \alpha^n(\xi^1, \ldots, \xi^n)\right)\right);$$

*) Расположение индексов сверху или снизу должно указывать на существование глубокой связи этих параметров с ко- и контравариантными координатами в линейной алгебре.

$$B(y_1,\ldots,y_m;\eta^1,\ldots,\eta^n) \equiv$$

$$\equiv \rho^{-1}\left(A\left(a_1^{-1}(y_1,\ldots,y_m),\ldots,a_m^{-1}(y_1,\ldots,y_m);\right.\right.$$

$$\left.\left.\alpha_1^{-1}(\eta^1,\ldots,\eta^n),\ldots,\alpha_n^{-1}(\eta^1,\ldots,\eta^n)\right)\right).$$

Мною было показано [22], что функциональное уравнение

$$\forall\, y_1, y_2; \eta^1, \eta^2 \in \mathfrak{R};\quad \Phi\begin{pmatrix}\varphi(y_1,\eta^1), & \varphi(y_1,\eta^2)\\ \varphi(y_2,\eta^1), & \varphi(y_2,\eta^2)\end{pmatrix} = 0 \qquad (1.4.8)$$

имеет одно и только одно решение, определенное с точностью до эквивалентности, которое может быть записано в двух эквивалентных друг другу формах. Показано, что общее решение функционального уравнения (1.4.8) получается из двух *фундаментальных решений*:

аддитивного

$$a(x,\xi) = x + \xi;$$

$$\Phi_1\begin{pmatrix}a_{11}, a_{12}\\ a_{21}, a_{22}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & a_{11} & a_{12}\\ 1 & a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{12} + a_{21} - a_{11} - a_{22}$$

и мультипликативного

$$b(y,\eta) = y\cdot\eta;$$

$$\Phi_2\begin{pmatrix}b_{11}, b_{12}\\ b_{21}, b_{22}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix} = b_{11}\cdot b_{22} - b_{12}\cdot b_{21}$$

путем произвольного преобразования аргументов:

$$A_{\psi,f,\alpha}(x,\xi) = \psi\left(a\left(f(x),\alpha(\xi)\right)\right);$$

$$B_{\chi,g,\beta}(y,\eta) = \chi\left(b\left(g(y),\beta(\eta)\right)\right).$$

Итак, можно показать, что вид уравнения Ньютона $m_i w_{i\alpha} = f_\alpha$ и вид непосредственно связанного с ним соотношения

$$\begin{vmatrix}w_{i\alpha} & w_{i\beta}\\ w_{k\alpha} & w_{k\beta}\end{vmatrix} = 0$$

не являются случайными; они оказываются единственно возможными, если в основание механики положить принцип *феноменологической инвариантности* ранга $(r, s)=(2,2)$, т.е. требование, чтобы четыре ускорения

	α	β
i	$w_{i\alpha}$	$w_{i\beta}$
k	$w_{k\alpha}$	$w_{k\beta}$

относящиеся к двум ($r = 2$) произвольным тела i и k и к двум ($s = 2$) произвольным акселераторам α и β, были бы связаны между собой одним функциональным соотношением

$$\Phi(w_{i\alpha}, w_{i\beta}, w_{k\alpha}, w_{k\beta}) = 0,$$

инвариантным относительно выбора двух тел i и k и двух акселераторов α и β.

Обратимся теперь к следующему примеру, иллюстрирующему понятие физической структуры ранга (3,2).

§ 1.5. Закон Ома — пример физической структуры ранга (3,2)

Легко видеть, что закон Ома для участка цепи

$$J = \frac{U}{R} \tag{1.5.1}$$

с точностью до обозначений и физической интерпретации имеет то же самое строение или, другими словами, ту же самую физическую структуру, что и только что рассмотренный закон Ньютона. В самом деле, полагая

$$I_{i\alpha} = \frac{1}{J_{i\alpha}}, \quad x_i = R_i, \quad \xi_\alpha = \frac{1}{U_\alpha},$$

где R_i — сопротивление проводника i,

U_α — разность потенциалов на выходе источника напряжения α,

$J_{i\alpha}$ — сила тока через проводник i при подключении его к источнику напряжения α,

получаем каноническую форму закона Ома для участка цепи:

$$I_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha, \tag{1.5.2}$$

совпадающую с канонической формой закона Ньютона (1.4.3).

Что же касается закона Ома для всей цепи

$$J = \frac{E}{R + \rho}, \tag{1.5.3}$$

то его строение — его физическая структура — существенно отличается от физической структуры второго закона механики Ньютона и потому мы рассмотрим его более подробно.

Входящие в (1.5.3) физические величины — сила тока J, сопротивление проводника R, электродвижущая сила E и внутреннее сопротивление ρ источника тока — имеют, как и в только что рассмотренном законе Ньютона, различную математическую природу. Так, сопротивление R_i является числовой функцией одной нечисловой переменной — проводника i, т.е.

$$R : \mathfrak{M} \to \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ — множество проводников $i, k, \ldots$; электродвижущая сила и внутреннее сопротивление являются числовыми функциями одной нечисловой переменной — источника тока α, т.е.

$$E : \mathfrak{N} \to \mathfrak{R};$$

$$\rho : \mathfrak{N} \to \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество источников тока $\alpha, \beta, \ldots$; сила же тока является числовой функцией *двух* нечисловых переменных — проводника i и источника α.

$$J : \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to \mathfrak{R}.$$

Итак, специально выделяя независимые нечисловые переменные $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$, перепишем закон Ома (1.5:3) в виде:

$$J_{i\alpha} = \frac{E_\alpha}{R_i + \rho_\alpha}. \qquad (1.5.4)$$

Таким образом, закон Ома в форме (1.5.4) представляет собой связь между существенно разнородными физическими величинами — *одноиндексными* сопротивлением R_i проводника i, электродвижущей E_α силой и внутренним сопротивлением ρ_α источника тока α, с одной стороны, и *двухиндексной* силой тока $J_{i\alpha}$ — с другой, т.е.

$$J_{i\alpha} = \varphi(R_i ; E_\alpha, \rho_\alpha) = E_\alpha/(R_i + \rho_\alpha).$$

Назовем соотношение

$$I_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha + \eta_\alpha, \qquad (1.5.5)$$

где

$$I_{i\alpha} = 1/J_{i\alpha},$$

$$x_i = R_i; \quad \zeta_\alpha = 1/E_\alpha; \quad \eta_\alpha = \rho_\alpha/E_\alpha,$$

канонической формой закона Ома для всей цепи.

Заметим, что, строго говоря, единственной измеряемой величиной в этом примере является сила тока $J_{i\alpha}$. В связи с этим перепишем закон Ома (1.5.4) в виде, не содержащем ни сопротивления R_i, ни электродвижущей силы E_α, ни внутреннего сопротивления ρ_α. Чтобы исключить все сопротивления, электродвижущие силы и внутренние сопротивления, нужно взять, как показывает простой перебор вариантов, по крайней мере *три* ($r = 3$) проводника $i, k, m \in \mathfrak{M}$ и *два* ($s = 2$) источника $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$.

Итак, запишем шесть ($K = r \times s = 6$) равенств:

$$\begin{aligned} J_{i\alpha} &= E_\alpha/(R_i + \rho_\alpha); \quad J_{i\beta} = E_\beta/(R_i + \rho_\beta); \\ J_{k\alpha} &= E_\alpha/(R_k + \rho_\alpha); \quad J_{k\beta} = E_\beta/(R_k + \rho_\beta); \\ J_{m\alpha} &= E_\alpha/(R_m + \rho_\alpha); \quad J_{m\beta} = E_\beta/(R_m + \rho_\beta), \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

содержащих семь ($N = m \times r + n \times s = 1 \times 3 + 2 \times 2 = 7$) неизвестных $R_i, R_k, R_m; E_\alpha, \rho_\beta; R_\beta, \rho_\beta$.

Обратим при этом внимание на то, что проводник i характеризуется *одним* ($m = 1$) параметром — сопротивлением R_i, а источник тока α характеризуется уже *двумя* ($n = 2$) параметрами — электродвижущей силой E_α и внутренним сопротивлением ρ_α.

Другими словами, множество проводников $\mathfrak{M}$ одномерно, а множество источников тока $\mathfrak{N}$ двумерно.

Итак, мы имеем *шесть* уравнений (1.5.6), содержащих *семь* неизвестных R_i, R_k, R_m ; E_α, ρ_α ; $E\beta, \rho\beta$. Особенность этой системы состоит в том, что из шести уравнений (1.5.6) можно исключить все семь неизвестных, получив при этом одно соотношение между токами;

$$J_{i\alpha}, \quad J_{i\beta},$$

$$J_{k\alpha}, \quad J_{k\beta},$$

$$J_{m\alpha}, \quad J_{m\beta}.$$

Исключая из шести уравнений (1.5.6) семь неизвестных, получаем следующее соотношение между шестью значениями сил тока J или между шестью их обратными значениями $I_{i\alpha} = 1/J_{i\alpha}$:

$$\forall i, k, m \in \mathfrak{M}; \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N};$$

$$\begin{vmatrix} J_{i\alpha} & J_{i\beta} & J_{i\alpha} \cdot J_{i\beta} \\ J_{k\alpha} & J_{k\beta} & J_{k\alpha} \cdot J_{k\beta} \\ J_{m\alpha} & J_{m\beta} & J_{m\alpha} \cdot J_{m\beta} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.5.7}$$

или

$$\begin{vmatrix} 1 & I_{i\alpha} & I_{i\beta} \\ 1 & I_{k\alpha} & I_{k\beta} \\ 1 & I_{m\alpha} & I_{m\beta} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.5.8}$$

Соотношение (1.5.8) мы будем называть *феноменологически инвариантной формой* закона Ома для всей цепи.

Оно не содержит ничего, кроме измеряемых на опыте сил токов (точнее, их обратных значений $I_{i\alpha} = \frac{1}{J_{i\alpha}}$) и может быть, таким образом, подвергнуто непосредственной экспериментальной проверке.

Итак, фундаментальное соотношение (1.5.8) или (1.5.7) получено нами как очевидное следствие из закона Ома (1.5.4). Но с другой стороны, можно показать, что каноническая форма закона Ома (1.5.5) или (1.5.6) в свою очередь может быть получена как следствие из функционального соотношения (1.5.8).

Только заметим при этом,что параметры $x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha$, входящие в правую часть выражения (1.5.5),не определяются однозначно, так как существует двухпараметрическая группа преобразований *)

$$x = C_1(\bar{x} - C_2);$$

$$\xi = \frac{1}{C_1} \cdot \bar{\xi};$$

$$\eta = \bar{\eta} + C_2\bar{\xi},$$

сохраняющая вид выражения

$$x_i \xi_\alpha + \eta_\alpha = \bar{x}_i \bar{\xi}_\alpha + \bar{\eta}_\alpha.$$

Чтобы перейти от феноменологически инвариантной формы закона Ома (1.5.8) к канонической (1.5.5), назовем два произвольных проводника, например, k и m, и один произвольный источник тока, например, β, "эталонными" и переобозначим их, соответствен-

---

*) Постоянная C_1 зависит от выбора системы единиц, а постоянная C_2 определяется выбором начала отсчета величины сопротивления.

но, через $\underline{1}, \underline{2}$ и $\overline{1}$. Полагая в (1.5.8) $k = \underline{1}, m = \underline{2}, \beta = \overline{1}$ и разрешая полученное равенство относительно $I_{i\alpha}$, будем иметь:

$$I_{i\alpha} = \frac{I_{i\overline{1}}(I_{\underline{1}\alpha} - I_{\underline{2}\alpha}) + I_{\underline{1}\overline{1}} I_{\underline{2}\alpha} - I_{\underline{2}\overline{1}} I_{\underline{1}\alpha}}{I_{\underline{1}\overline{1}} - I_{\underline{2}\overline{1}}}$$

или

$$I_{i\alpha} = C_1 \left(\frac{I_{i\overline{1}}}{I_{\underline{1}\overline{1}} - I_{\underline{2}\overline{1}}} - C_2 \right) \cdot \frac{I_{\underline{1}\alpha} - I_{\underline{2}\alpha}}{C_1} + \\ + \frac{I_{\underline{1}\overline{1}} I_{\underline{2}\alpha} - I_{\underline{2}\overline{1}} I_{\underline{1}\alpha}}{I_{\underline{1}\overline{1}} - I_{\underline{2}\overline{1}}} + C_2 (I_{\underline{1}\alpha} - I_{\underline{2}\alpha}). \tag{1.5.9}$$

Полагая в полученном выражении

$$C_1 \left(\frac{I_{i\overline{1}}}{I_{\underline{1}\overline{1}} - I_{\underline{2}\overline{1}}} - C_2 \right) = x_i = R_i;$$

$$\frac{I_{\underline{1}\alpha} - I_{\underline{2}\alpha}}{C_1} = \xi_\alpha = \frac{1}{E_\alpha};$$

$$\frac{I_{\underline{1}\overline{1}} I_{\underline{2}\alpha} - I_{\underline{2}\overline{1}} I_{\underline{1}\alpha}}{I_{\underline{1}\overline{1}} - I_{\underline{2}\overline{1}}} + C_2 (I_{\underline{1}\alpha} - I_{\underline{2}\alpha}) = \eta_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{E_\alpha},$$

получаем закон Ома для всей цепи в канонической форме (1.5.5) или (1.5.4). Итак, мы показали, что закон Ома для всей цепи может быть записан в двух эквивалентных формах:

канонической

$$I_{i\alpha} = \varphi(x_{1i}; \xi^1_\alpha, \xi^2_\alpha) = x_{1i}\, \xi^1_\alpha + \xi^2_\alpha, \tag{1.5.10}$$

где

$$I_{i\alpha} = \frac{1}{J_{i\alpha}};$$

$$x_{1i} = x_i = R_i;$$

$$\xi^1_\alpha = \xi_\alpha = \frac{1}{E_\alpha};$$

$$\xi^2_\alpha = \eta_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{E_\alpha};$$

и феноменологически инвариантной

$$\Phi\begin{pmatrix} I_{i\alpha}, & I_{i\beta} \\ I_{k\alpha}, & I_{k\beta} \\ I_{m\alpha}, & I_{m\beta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & I_{i\alpha} & I_{i\beta} \\ 1 & I_{k\alpha} & I_{k\beta} \\ 1 & I_{m\alpha} & I_{m\beta} \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.5.11)$$

Другими словами, мы можем сказать, что сила тока $J_{i\alpha}$ через произвольный проводник i под действием произвольного источника тока α зависит вполне определенным образом от силы тока $J_{i\beta}$ через проводник i под действием эталонного источника тока β, от сил токов $J_{k\alpha}, J_{m\alpha}$ через эталонные проводники k и m под действием источника тока α и, наконец, от сил токов $J_{k\beta}, J_{m\beta}$ через эталонные проводники k и m под действием эталонного источника тока β (см. рис. 2).

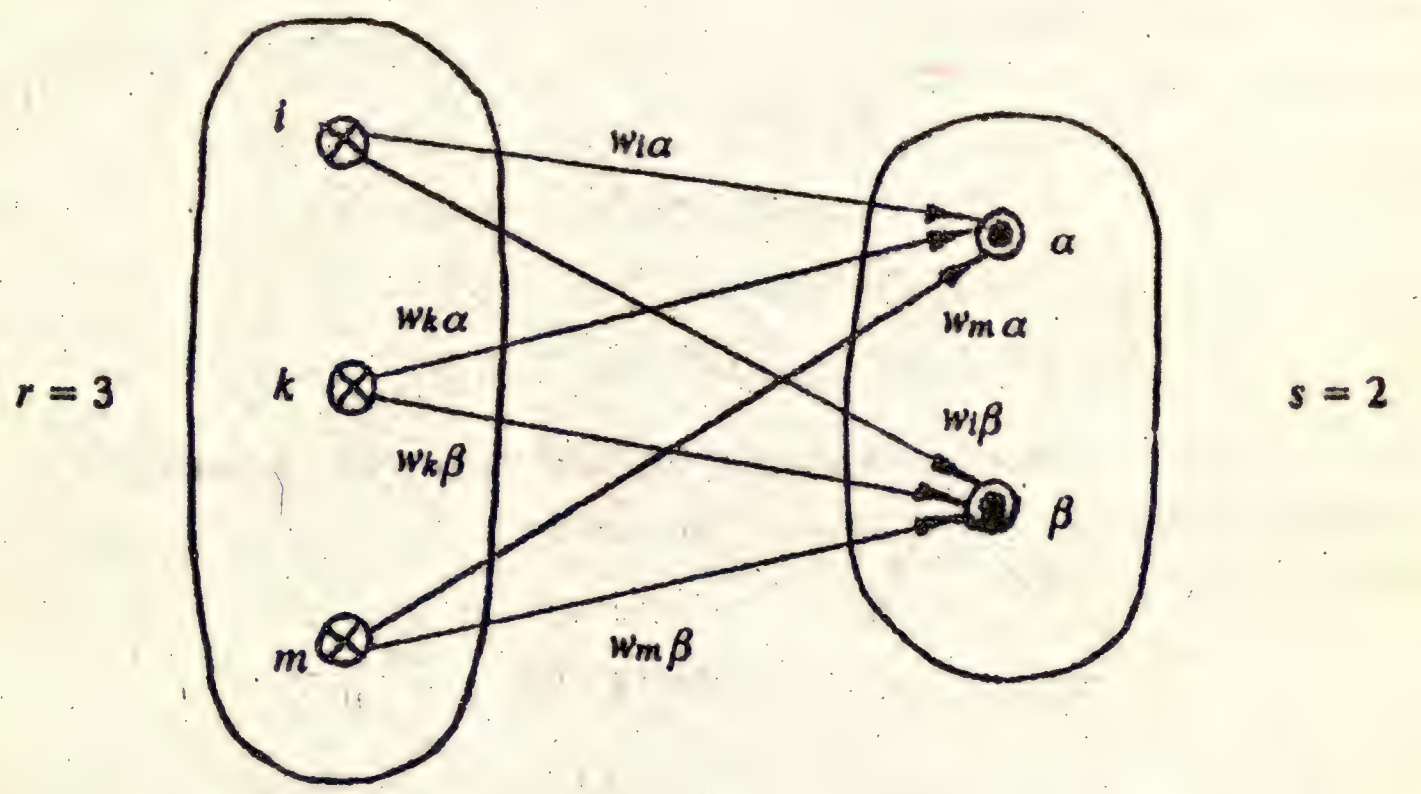


Рис.2. Физическая структура ранга (3,2); диаграмма отношений между физическими объектами.

Опираясь на этот пример, сформулируем понятие физической структуры ранга (3,2).

Рассмотрим два множества

$$\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$$

и

$$\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$$

и, соответственно, два отображения

$$U : \mathfrak{M} \to \mathfrak{R};$$

$$i \mapsto x(i);$$

и

$$V : \mathfrak{N} \to \mathfrak{R}^2;$$

$$\alpha \mapsto \xi(\alpha), \eta(\alpha).$$

Мы будем говорить,что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ разномерности (1,2) определена физическая структура ранга (3,2), если существует вещественная функция трех вещественных переменных

$$\eta : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^2 \to \mathfrak{R};$$

$$x : \xi, \eta \mapsto \varphi(x; \xi, \eta)$$

такая, что шесть функций

	ξ_1, η_1	ξ_2, η_2
x_1	$\varphi(x_1; \xi_1, \eta_1)$	$\varphi(x_1; \xi_2, \eta_2)$
x_2	$\varphi(x_2; \xi_1, \eta_1)$	$\varphi(x_2; \xi_2, \eta_2)$
x_3	$\varphi(x_3; \xi_1, \eta_1)$	$\varphi(x_3; \xi_2, \eta_2)$

образованные с помощью одной–единственной функции $\varphi(x; \xi, \eta)$ путем всевозможной замены переменных x и ζ, η на новые независимые переменные

$$x \to x_1, x_2, x_3;$$

$$\xi \to \xi_1, \xi_2;$$

$$\eta \to \eta_1, \eta_2;$$

связаны между собой соотношением

$$\Phi \begin{pmatrix} \varphi(x_1; \xi_1, \eta_1), & \varphi(x_1; \xi_2, \eta_2) \\ \varphi(x_2; \xi_1, \eta_1), & \varphi(x_2; \xi_2, \eta_2) \\ \varphi(x_3; \xi_1, \eta_1), & \varphi(x_3; \xi_2, \eta_2) \end{pmatrix} = 0, \qquad (1.5.12)$$

представляющим собой тождество относительно независимых переменных $x_1, x_2, x_3; \xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$.

Итак, задача состоит в том, чтобы найти неизвестные функции $\varphi(x; \xi, \eta)$ и

$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi_{11}, & \varphi_{12}\\ \varphi_{21}, & \varphi_{22}\\ \varphi_{31}, & \varphi_{32}\end{pmatrix},$$

обращающие равенство (1.5.12) в тождество относительно системы независимых переменных $x_1, x_2, x_3; \xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$.

Эта задача была впервые решена моим учеником Г.Г.Михайличенко [23], [24], разработавшим общий метод решения необычных функциональных уравнений типа (1.4.8) или (1.5.12), возникающих в рамках теории физических структур.

Им было показано [25], что функциональное уравнение (1.5.12) относительно двух неизвестных функций

$$\varphi : \mathfrak{R}\times\mathfrak{R}^2 \to \mathfrak{R}; \qquad \Phi : \mathfrak{R}^6 \to \mathfrak{R};$$

имеет одно и только одно фундаментальное решение, определенное с точностью до эквивалентности

$$\varphi(x; \xi, \eta) = x\xi + \eta;$$

$$\Phi_1\begin{pmatrix}a_{11}, & a_{12}\\ a_{21}, & a_{22}\\ a_{31}, & a_{32}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & a_{11} & a_{12}\\ 1 & a_{21} & a_{22}\\ 1 & a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Общее решение получается из фундаментального путем произвольного преобразования аргументов

$$\varphi(x; \xi, \eta) = \chi\left(f(x)\cdot U(\xi, \eta) + V(\xi, \eta)\right).$$

Итак, можно показать, что форма закона Ома для всей цепи

$$J_{i\alpha} = \frac{E_\alpha}{R_i + \rho_\alpha}$$

и вид непосредственно связанного и с ним соотношения

$$\begin{vmatrix}1 & I_{i\alpha} & I_{i\beta}\\ 1 & I_{k\alpha} & I_{k\beta}\\ 1 & I_{m\alpha} & I_{m\beta}\end{vmatrix} = 0$$

не являются случайными; они оказываются единственно возможными (с точностью до простых переобозначений), если в основание электродинамики постоянных токов положить принцип *феноменологической симметрии ранга* (3,2), т.е. требование, чтобы шесть сил токов

	α	β
i	$J_{i\alpha}$	$J_{i\beta}$
k	$J_{k\alpha}$	$J_{k\beta}$
m	$J_{m\alpha}$	$J_{m\beta}$

относящиеся к трем ($r = 3$) произвольным проводникам i, k, m и к двум ($s = 2$) произвольным источникам тока α и β, были бы связаны между собой функциональным соотношением

$$\Phi \begin{pmatrix} J_{i\alpha}, & J_{i\beta} \\ J_{i\alpha}, & J_{i\beta} \\ J_{i\alpha}, & J_{i\beta} \end{pmatrix} = 0,$$

инвариантным относительно выбора трех проводников i, k, m и двух источников тока α и β.

Итак, на двух простейших примерах мы рассмотрели две физические структуры ранга (2,2) и (3,2), описывающие определенные типы устойчивых (феноменологически инвариантных) отношений между двумя множествами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ различной природы.

От этих примеров перейдем теперь к рассмотрению физических структур на двух дифференцируемых многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ произвольного ранга (r, s).

§ 1.6. Система эталонов и система координат на двух многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — два дифференцируемых многообразия размерности m и n. Рассмотрим некоторую непрерывную, достаточное число раз дифференцируемую функцию $m + n$ переменных, характеризующую отношения между элементами $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$,

$$a_{i\alpha} = \varphi\left(x(i); \xi(\alpha)\right) = \\ = \varphi\left(x_1(i), \ldots, x_m(i); \xi^1(\alpha), \ldots, \xi^n(\alpha)\right). \tag{1.6.1}$$

Эта функция играет фундаментальную роль во всей теории физических структур, мы будем называть ее репрезентатором (парным отношением на двух множествах).

Выберем из многообразия $\mathfrak{N}$ m произвольных элементов $\overline{1}, \ldots, \overline{m} \in \mathfrak{N}$ — *систему эталонов из многообразия* $\mathfrak{N}$ с координатами

$$\xi^1(\overline{1}),\ldots \xi^1(\overline{m}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi^n(\overline{1}),\ldots \xi^n(\overline{m}).$$

Отношения произвольного элемента $i \in \mathfrak{M}$ с m базисными элементами $\overline{1},\ldots, \overline{m} \in \mathfrak{M}$ (см. рис.3) характеризуются m равенствами:

$$a_{i\overline{1}} = \varphi\left(x_1(i),\ldots, x_m(i); \xi^1(\overline{1}),\ldots, \xi^n(\overline{1})\right);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i\overline{m}} = \varphi\left(x_1(i),\ldots, x_m(i); \xi^1(\overline{m}),\ldots, \xi^n(\overline{m})\right);$$

разрешая которые относительно $x_1(i),\ldots, x_m(i)$, будем иметь следующие выражения для координат элемента $i \in \mathfrak{M}$:

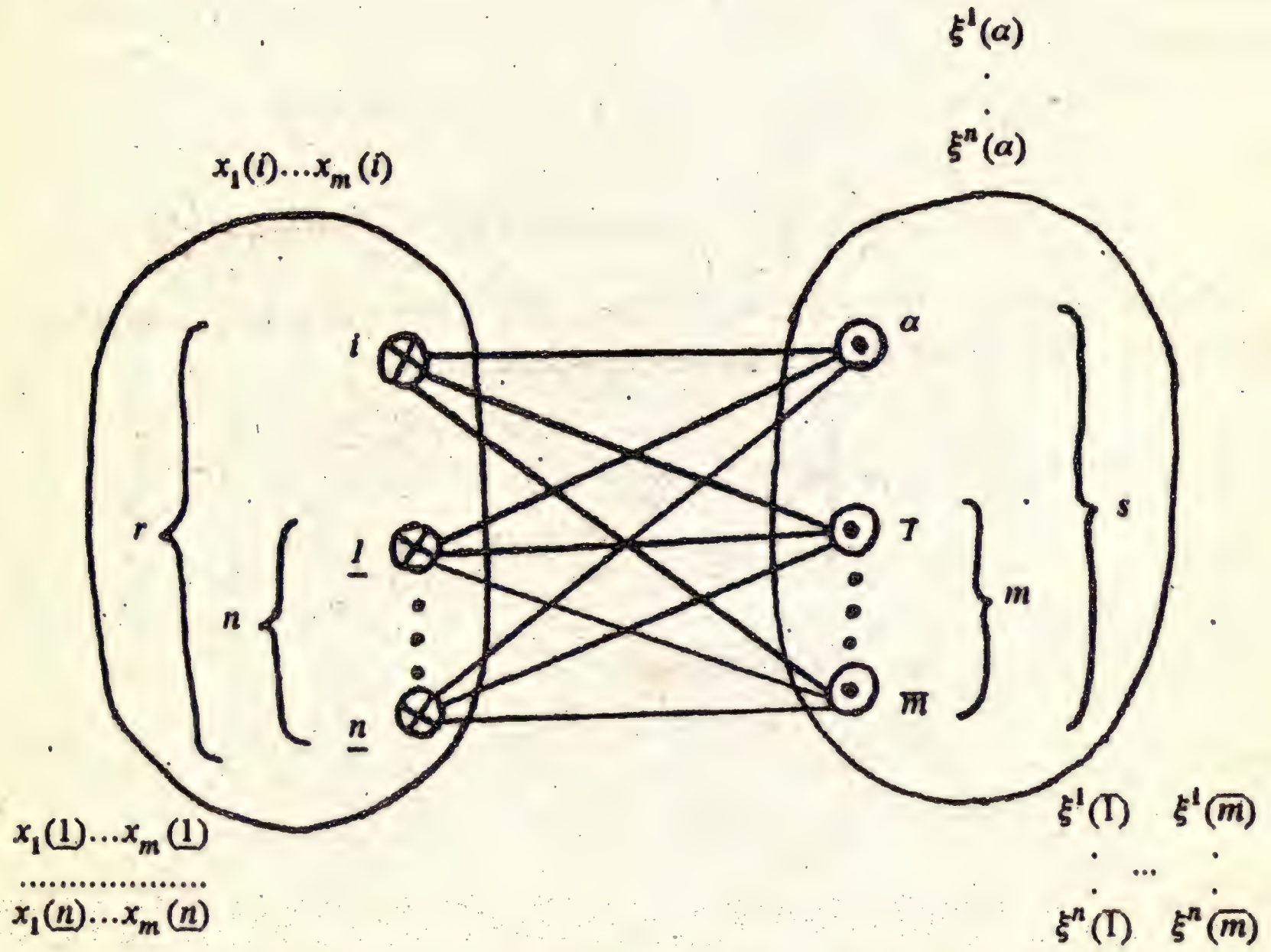


Рис.3. Физическая структура ранга $(r, s) = (n + 1, m + 1)$ на двух множествах; диаграмма отношений объектов $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{A}$ с эталонами системы и между собой.

$$x_\mu(i) = x_\mu\left(a_{\overline{1}},\ldots, a_{\overline{im}};\ \begin{matrix}\xi^1(\overline{1}),\ldots\xi^1(\overline{m});\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \xi^n(\overline{1}),\ldots\xi^n(\overline{m})\end{matrix}\right);$$

$\mu = 1, 2,\ldots, m.$

Аналогичным образом выберем из многообразия $\mathfrak{M}$ n произвольных элементов $\underline{1},\ldots, \underline{n} \in \mathfrak{M}$ — *систему эталонов из многообразия* $\mathfrak{M}$ с координатами

$$x_1(\underline{1}),\ldots x_m(\underline{1});$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1(\underline{n}),\ldots x_m(\underline{n});$$

и рассмотрим отношения произвольного элемента $\alpha \in \mathfrak{N}$ с n базисными элементами $\underline{1},\ldots, \underline{n} \in \mathfrak{M}$ (см. рис. 3), характеризуемые n равенствами:

$$a_{\underline{1}\alpha} = \varphi\left(x_1(\underline{1}),\ldots, x_m(\underline{1}); \xi^1(\alpha),\ldots, \xi^n(\alpha)\right);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{\underline{n}\alpha} = \varphi\left(x_1(\underline{n}),\ldots, x_m(\underline{n}); \xi^1(\alpha),\ldots, \xi^n(\alpha)\right);$$

Разрешая их относительно $\xi^1(\alpha),\ldots\xi^n(\alpha)$, будем иметь для координат элемента $\alpha \in \mathfrak{N}$ следующие выражения:

$$\xi^\nu(\alpha) = \xi^\nu\left(a_{\underline{1}\alpha},\ldots, a_{\underline{n}\alpha};\ \begin{matrix}x_1(\underline{1}),\ldots x_m(\underline{1});\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1(\underline{n}),\ldots x_m(\underline{n})\end{matrix}\right);$$

$\nu = 1, 2,\ldots, n.$

С другой стороны, mn координат

$$x_1(\underline{1})\ldots x_m(\underline{1});$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1(\underline{n})\ldots x_m(\underline{n})$$

связаны с mn координатами

$$\xi^1(\overline{1})\ldots \xi^1(\overline{m});$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi^n(\overline{1})\ldots \xi^n(\overline{m})$$

mn соотношениями (см. рис.3):

$$a_{\underline{\nu}\overline{\mu}} = \varphi\left(x_1(\underline{\nu}) \dots x_m(\underline{\nu}); \zeta^1(\overline{\mu}) \dots \zeta^n(\overline{\mu});\right);$$

$\mu = 1, 2, \dots, m; \quad \nu = 1, 2, \dots, n;$

Таким образом, координаты $x_\mu(\underline{\nu})$ и $\xi^\nu(\overline{\mu})$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$; $\nu = 1, 2, \dots, n$) могут быть выражены через mn репрезентаторов (парных отношений) $a_{\underline{\nu}\overline{\mu}}$ и mn произвольных параметров

$$\begin{matrix} C_{11}, \dots C_{1m}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{n1}, \dots C_{nm}, \end{matrix}$$

т.е.

$$x_\mu(\underline{\nu}) = x_{\mu\underline{\nu}}\begin{pmatrix} a_{\underline{1}\Gamma} \dots a_{\underline{1}\overline{m}} & C_{11} \dots C_{1m} \\ \dots\dots\dots\dots; & \dots\dots\dots\dots \\ a_{\underline{n}\Gamma} \dots a_{\underline{n}\overline{m}} & C_{n1} \dots C_{nm} \end{pmatrix};$$

$$\xi^\nu(\overline{\mu}) = \xi^{\nu}_{\overline{\mu}}\begin{pmatrix} a_{\underline{1}\Gamma} \dots a_{\underline{1}\overline{m}} & C_{11} \dots C_{1m} \\ \dots\dots\dots\dots; & \dots\dots\dots\dots \\ a_{\underline{n}\Gamma} \dots a_{\underline{n}\overline{m}} & C_{n1} \dots C_{nm} \end{pmatrix}.$$

Совокупность mn произвольных параметров

$$C_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} C_{11} \dots C_{1m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ C_{n1} \dots C_{nm} \end{pmatrix}$$

мы будем называть *системой координат*, заданной на многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Зная $x_\mu(\underline{\nu})$ и $\xi^\nu(\overline{\mu})$, находим координаты элемента $i \in \mathfrak{M}$ и элемента $\alpha \in \mathfrak{N}$:

$$x_\mu(i) = x_\mu\left(\boxed{a_{i\Gamma}, \dots, a_{i\overline{m}}}; \boxed{\begin{matrix} a_{\underline{1}\Gamma} \dots a_{\underline{1}\overline{m}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{\underline{n}\Gamma} \dots a_{\underline{n}\overline{m}} \end{matrix}}; \begin{matrix} C_{11} \dots C_{1m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ C_{n1} \dots C_{nm} \end{matrix}\right);$$

$$\xi^\nu(\alpha) = \zeta^\nu\left(\boxed{a_{\underline{1}\alpha}, \dots, a_{\underline{n}\alpha}}; \boxed{\begin{matrix} a_{\underline{1}\Gamma} \dots a_{\underline{1}\overline{m}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{\underline{n}\Gamma} \dots a_{\underline{n}\overline{m}} \end{matrix}}; \begin{matrix} C_{11} \dots C_{1m} \\ \dots\dots\dots\dots \\ C_{n1} \dots C_{nm} \end{matrix}\right).$$

Подставляя полученные координаты $x_\mu(i)$ и $\xi^n(\alpha)$ в исходное соотношение (1.6.1), получим окончательное выражение для репрезентатора (парного отношения)

$$a_{i\alpha} = \varphi\left(x_1(i),\ldots, x_m(i); \xi^1(\alpha),\ldots, \xi^n(\alpha)\right) =$$

$$= f\left(\boxed{a_{i\Gamma},\ldots, a_{i\overline{m}}};\ \boxed{\begin{matrix} a_{\underline{1}\Gamma},\ldots, a_{\underline{1}\overline{m}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\underline{n}\Gamma},\ldots, a_{\underline{n}\overline{m}} \end{matrix}};\ \boxed{\begin{matrix} a_{\underline{1}\alpha} \\ \ldots \\ a_{\underline{n}\alpha} \end{matrix}};\ \begin{matrix} C_{11}\ldots C_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{n1}\ldots C_{nm} \end{matrix}\right).$$

При этом возникает следующая математическая задача: найти такую функцию $m + n$ переменных $\varphi(x_1,\ldots, x_m; \xi^1,\ldots, \xi^n)$, при которой репрезентатор $a_{i\alpha}$ не зависел бы от системы координат

$$\begin{matrix} C_{11}\ldots C_{1m}; \\ C_{n1}\ldots C_{nm} \end{matrix}$$

или, другими словами, найти такую функцию $m + n$ переменных

$$a_{i\alpha} = \varphi\left(x_1(i),\ldots, x_m(i); \xi^1(\alpha),\ldots, \xi^n(\alpha)\right),$$

что при заданных целых натуральных числах

$$\boxed{r = n + 1}$$

и

$$\boxed{s = m + 1}$$

(пара $(r, s) = (n + 1, m + 1)$ называется рангом бинарной физической структуры) rs функций, входящих в таблицу

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a_{i\alpha} & a_{i\Gamma}\ldots a_{i\overline{m}} \\ \hline a_{\underline{1}\alpha} & a_{\underline{1}\Gamma}\ldots a_{\underline{1}\overline{m}} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\underline{n}\alpha} & a_{\underline{n}\Gamma}\ldots a_{\underline{n}\overline{m}} \\ \hline \end{array}$$

были бы связаны между собой одним функциональным соотношением:

$$\Phi\begin{pmatrix} a_{i\alpha}, a_{i\Gamma},\ldots, a_{i\overline{m}} \\ a_{\underline{1}\alpha}, a_{\underline{1}\Gamma},\ldots, a_{\underline{1}\overline{m}} \\ \ldots\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n\alpha}, a_{n\Gamma},\ldots, a_{n\overline{m}} \end{pmatrix} = 0.$$

§ 1.7. Физическая структура ранга (r, s) на двух множествах

Определение 1. Мы будем говорить, что на двух дифференцируемых многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ размерности m и n определена физическая структура ранга

$$(r, s) = (n + 1, m + 1)$$

если для любых $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ существует непрерывная, достаточное число раз дифференцируемая функция $m + n$ переменных — репрезентатор (парное отношение)

$$a(i, \alpha) = \varphi\left(x_1(i), \ldots, x_m(i); \xi^1(\alpha), \ldots, \xi^n(\alpha)\right),$$

такой, что rs репрезентаторов

$$a(i_\rho, \alpha_\sigma) \quad (\rho = 1, 2, \ldots, r; \sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

связаны между собой одним функциональным соотношением

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{i_1\alpha_1}, \ldots, a_{i_1\alpha_s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i_r\alpha_1}, \ldots, a_{i_r\alpha_s} \end{pmatrix} = 0 \qquad (1.7.1)$$

Итак, задача состоит в том, чтобы при заданных

$$r = n + 1;$$

и

$$s = m + 1$$

найти заранее неизвестные функции

$$\varphi : \mathfrak{R}^m \times \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R};$$

$$\Phi : \mathfrak{R}^{rs} \to \mathfrak{R},$$

обращающие равенство (1.7.1) в тождество относительно системы

$$mr + ns = 2mn + m + n = 2rs - r - s$$

независимых переменных

$$x_1(i_1),\ldots, x_m(i_1); \qquad \xi^1(\alpha_1),\ldots, \xi^1(\alpha_s);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{и} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1(i_r),\ldots, x_m(i_r) \qquad \xi^n(\alpha_1),\ldots,, \xi^n(\alpha_s).$$

Эта задача для случая ранга (2,2) впервые была решена мною [22], а во всех остальных случаях — моим учеником Г.Г.Михайличенко в его кандидатской диссертации "Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона" /Новосибирск, НГУ, 1973/. Методы решения и результаты приведены в большой серии работ, посвященных созданию и разработке теории физических структур [1], [11], [22]—[25].

Итак, показано, что

при $r = s = 1$ существует одна тривиальная физическая структура;

при $r = s = 2$ существует две нетривиальные физические структуры, сводимые друг к другу некоторым простым преобразованием;

при $r = s \geq 3$ существуют две и только две несводимые друг к другу физические структуры;

показано далее, что для каждого из рангов $(r, r+1)$ и $(r+1, r)$, где $r = 1, 2,\ldots$, а также для двух особых рангов (2,4) и (4,2) существуют единственные физические структуры (см. рис. 4).

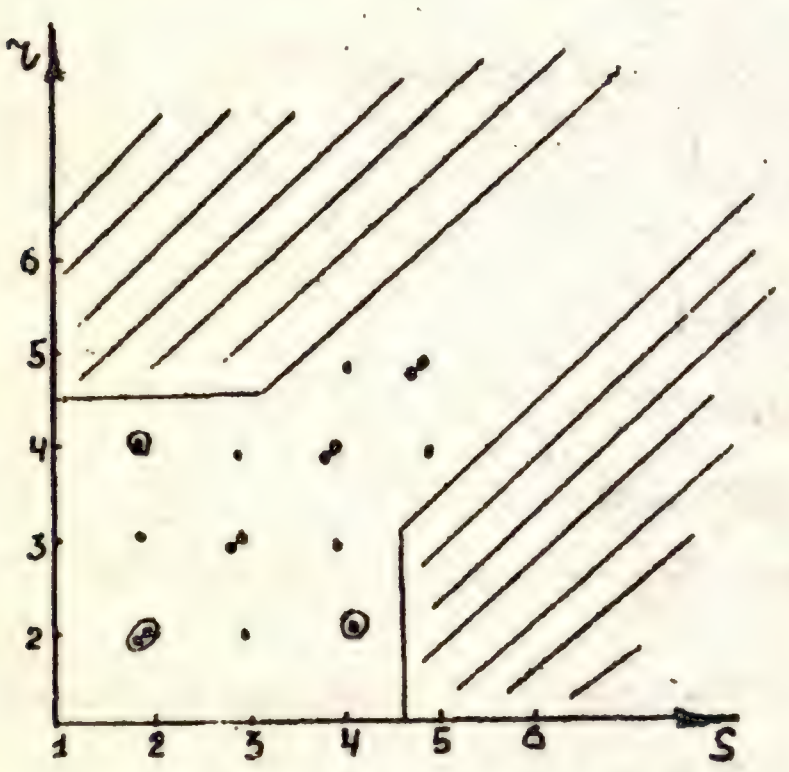


Рис. 4. Ранги существующих физических структур на двух множествах

Все эти структуры найдены и их конкретный вид приведен в таблицах 1,2,3; что же касается остальных рангов (на рис. 4 точки, им соответствующие, находятся в заштрихованной области), то в той же диссертации Г.Г.Михайличенко показано, что физические структуры этих рангов не могут существовать в принципе.

До сих пор мы рассматривали самый важный тип физических структур — бинарные физические структуры ранга (r, s) (физические структуры на двух многообразиях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$). Однако существует еще один интересный случай устойчивых (феноменологически инвариантных) полиарных отношений — физические струк-

туры ранга r (бинарные физические структуры с парными отношениями на одном многообразии $\mathfrak{M}$).

Таблица 1

Физические структуры ранга (r, r) на двух множествах

Ранг	Вид функции $\varphi : \mathfrak{R}^m \times \mathfrak{R}^m \to \mathfrak{R}$	Вид функции $\Phi : \mathfrak{R}^{r^2} \to \mathfrak{R}$
(1,1)	$a_{i\alpha}$ не существует	—
	$b_{i\alpha} = 0$	$D_{i,\alpha} = b_{i\alpha}$
(2,2)	$a_{i\alpha} = x_i + \xi_\alpha$	$D^1_{ik,\alpha\beta} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix}$
	$b_{i\alpha} = y_i \eta_\alpha$	$D_{ik,\alpha\beta} = \begin{vmatrix} b_{i\alpha} & b_{i\beta} \\ b_{k\alpha} & b_{k\beta} \end{vmatrix}$
(3,3)	$a_{i\alpha} = x^0_i + \xi^0_\alpha + x_{1\alpha}\xi^1_\alpha$	$D^1_{ikm,\alpha\beta\gamma} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} \end{vmatrix}$
	$b_{i\alpha} = y_{1i}\eta^1_\alpha + y_{2i}\eta^2_\alpha$	$D_{ikm,\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} b_{i\alpha} & b_{i\beta} & b_{i\gamma} \\ b_{k\alpha} & b_{k\beta} & b_{k\gamma} \\ b_{m\alpha} & b_{m\beta} & b_{m\gamma} \end{vmatrix}$
(4,4)	$a_{i\alpha} = x^0_i + \xi^0_\alpha + x_{1i}\xi^1_\alpha + x_{2i}\xi^2_\alpha$	$D^1_{ikmn,\alpha\beta\gamma\delta} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} & a_{m\delta} \\ 1 & a_{n\alpha} & a_{n\beta} & a_{n\gamma} & a_{n\delta} \end{vmatrix}$
	$b_{i\alpha} = y_{1i}\eta^1_\alpha + y_{2i}\eta^2_\alpha + y_{3i}\eta^3_\alpha$	$D_{ikmn,\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} b_{i\alpha} & b_{i\beta} & b_{i\gamma} & b_{i\delta} \\ b_{k\alpha} & b_{k\beta} & b_{k\gamma} & b_{k\delta} \\ b_{m\alpha} & b_{m\beta} & b_{m\gamma} & b_{m\delta} \\ b_{n\alpha} & b_{n\beta} & b_{n\gamma} & b_{n\delta} \end{vmatrix}$

Таблица 2

Физические структуры ранга $(r, r+1)$ и $(r+1, r)$ на двух множествах

Ранг (r, s)	Вид функции $\varphi : \mathfrak{R}^{s-1} \times \mathfrak{R}^{r-1} \to \mathfrak{R}$	Вид функции $\Phi : \mathfrak{R}^{rs} \to \mathfrak{R}$
(1,2)	$a_{i\alpha} = x_i$	$D_{i,\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} \end{vmatrix}$
(2,1)	$a_{i\alpha} = \xi_\alpha$	$D_{i,\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} \\ 1 & a_{i\beta} \end{vmatrix}$
(2,3)	$a_{i\alpha} = x_i^0 + x_{1i}\xi_\alpha^1$	$D_{ik,\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \end{vmatrix}$
(3,2)	$a_{i\alpha} = \xi_\alpha^0 + x_{1i}\xi_\alpha^1$	$D_{ikm,\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} \end{vmatrix}$
(3,4)	$a_{i\alpha} = x_i^0 + x_{1i}\xi_\alpha^1 + x_{2i}\xi_\alpha^2$	$D_{ikm,\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} \end{vmatrix}$
(4,3)	$a_{i\alpha} = \xi_\alpha^0 + x_{1i}\xi_\alpha^1 + x_{2i}\xi_\alpha^2$	$D_{ikm,\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} \\ 1 & a_{n\alpha} & a_{n\beta} & a_{n\gamma} \end{vmatrix}$

Таблица 3

Физические структуры ранга (2,4) и (4.2) на двух множествах

Ранг (r, s)	Вид функции $\varphi : \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$	Вид функции $\Phi : \mathfrak{R}^8 \to \mathfrak{R}$
(2,4)	$a_{i\alpha} = \dfrac{x_i \xi_\alpha + y_i}{\xi_\alpha + z_i}$	$D_{ik,\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{i\alpha}a_{k\alpha} & a_{i\beta}a_{k\beta} & a_{i\gamma}a_{k\gamma} & a_{i\delta}a_{k\delta} \end{vmatrix}$
(4,2)	$a_{i\alpha} = \dfrac{x_i \xi_\alpha + \eta_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha}$	$D_{iklmn,\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\alpha}a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\alpha}a_{k\beta} \\ 1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\alpha}a_{m\beta} \\ 1 & a_{n\alpha} & a_{n\beta} & a_{n\alpha}a_{n\beta} \end{vmatrix}$

Примером таких, в каком–то смысле вырожденных, физических структур может служить хорошо известная всем евклидова геометрия.

ГЛАВА 1.2

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ

§ 1.8. Об одном замечании Эйнштейна

Первыми, кто обратил внимание на то, что "евклидова геометрия ... содержит нечто большее, чем простые дедукции, полученные из определений логическим путем", были Мах и Эйнштейн.

Эйнштейн, рассматривая вопрос о связи геометрии с объектами природы, писал: "Физика занимает вопрос, справедливы ли теоремы геометрии. То, что евклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые дедукции, полученные из определений логическим путем, видно из следующего простого рассуждения.

Между N точками пространства существуют $\frac{1}{2}N(N-1)$ расстояний l_{ik}; между l_{ik} и $3N$ координатами имеют место соотношения

$$l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2. \qquad (1.8.1)$$

Из этих $\frac{1}{2}N(N-1)$ уравнений можно исключить $3N$ координат, и тогда для l_{ik} останется, по крайней мере, $\frac{1}{2}N(N-1) - 3N$ соотношений.*) Поскольку l_{ik} — измеряемые величины и, по определению, не зависят друг от друга, эти соотношения между величинами l_{ik} не являются необходимыми a priori". [26].

В другом месте Эйнштейн отмечает, что "Мах был единственным, кто серьезно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками".

---

*) Фактически, из-за специального вида уравнений (1.8.1) из приведенной системы можно исключить не $3N$ координат, а только $3N$ — 6 и тогда для l_{ik} останется не $1/2N(N-1)-3N$ соотношений, а $1/2N(N-1)-3N-6$. Однако ясно, что подобное уточнение не меняет существа дела. — Ю.К.

Заметим, что факт существования и вид связи между расстояниями на прямой, на плоскости, в трехмерном и n–мерном евклидовых пространствах, в пространствах постоянной положительной и отрицательной кривизны были известны математикам давно [27], [28]. О существовании упомянутых выше связей между расстояниями иногда говорится и в физической литературе, например, в книге Синга [29] или в книге Вейнберга [30]. Однако после Маха, пожалуй, только один Эйнштейн увидел в факте существования связи между расстояниями нетривиальную физическую проблему. Действительно, Вейнберг говорит об этой связи лишь как об иллюстрации существования внутренней геометрии любой поверхности, открытой еще Гауссом, а Синг, приводя в своей "Общей теории относительности" [29] конкретный вид уравнения, связывающего десять взаимных расстояний между пятью произвольными точками трехмерного евклидова пространства i, k, m, n, p

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{im}^2 & l_{in}^2 & l_{ip}^2 \\ 1 & l_{ik}^2 & 0 & l_{km}^2 & l_{kn}^2 & l_{kp}^2 \\ 1 & l_{im}^2 & l_{km}^2 & 0 & l_{mn}^2 & l_{mp}^2 \\ 1 & l_{in}^2 & l_{kn}^2 & l_{mn}^2 & 0 & l_{np}^2 \\ 1 & l_{ip}^2 & i_{kp}^2 & l_{mp}^2 & l_{np}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

рассматривает его лишь как вспомогательное средство для экспериментального определения кривизны мировой линии наблюдателя при наличии гравитационного поля.

И только Эйнштейн взглянул на всю эту элементарную алгебру расстояний глазами физика–философа и, по–видимому, интуитивно почувствовал, что "евклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые дедукции".

Мысль, заключенная в словах Эйнштейна о том, что факт существования соотношения между измеряемыми на опыте расстояниями имеет нетривиальное происхождение и отражает наиболее глубокие физические свойства системы материальных точек, является, на мой взгляд, чрезвычайно плодотворной.

§ 1.9. Евклидова геометрия — пример физической структуры на одном множестве

1. Наглядные соображения

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}$, состоящее из N произвольно расположенных в трехмерном пространстве точек. Можно ли утверждать, что несмотря на совершенно произвольное их расположение, существует вполне определенный физический закон (т.е. закон, справедливость которого может быть установлена экспериментальным путем), которому подчиняются все точки множества $\mathfrak{M}$?

Оказывается, что такой закон действительно существует. Чтобы обнаружить его, необходимо рассмотреть все возможные пары точек из $\mathfrak{M}$ (их будет $\frac{1}{2}N(N-1)$) и сопоставить с каждой парой экспериментально измеряемую величину, характеризующую взаимное расположение точек. В качестве такой измеряемой на опыте величины примем в простейшем случае расстояние, измеренное, например, с помощью обычной масштабной линейки.

Сопоставляя с каждой парой точек (i,k) расстояние l_{ik}, мы получим набор опытных данных, полностью характеризующих данное множество $\mathfrak{M}$, который может быть представлен в виде следующей симметрической матрицы:

	i_1	i_2	i_3	$\ldots$	i_N
i_1	0	l_{12}	l_{13}	$\ldots$	l_{1N}
i_2	l_{12}	0	l_{23}	$\ldots$	l_{2N}
i_3	l_{13}	l_{23}	0	$\ldots$	l_{3N}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
i_N	l_{1N}	l_{2N}	l_{3N}	$\ldots$	0

,

где $l_{rs} \equiv l_{i_r i_s}$.

Ясно, что взаимные расстояния l_{ik}, l_{im}, l_{km} между тремя точками произвольного симплекса $\sigma_3 = \{i, k, m\} \subset \mathfrak{M}_3$ не могут быть связаны между собой функциональной зависимостью, так как при фиксированных расстояниях l_{ik} и l_{im} третье расстояние l_{km} может принимать различные значения от $|l_{ik} - l_{im}|$ до $l_{im} + l_{im}$ (см. рис. 5).

Точно так же обстоит дело, если взять произвольный симплекс $\sigma_4 = \{i, k, m, n\} \subset \mathfrak{M}_3$, состоящий из четырех точек, и рассмотреть

зависимость между шестью взаимными расстояниями $l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{km}, l_{kn}, l_{mn}$. При фиксированных пяти расстояниях $l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{km}, l_{kn}$ шестое расстояние l_{mn} может принимать различные значения из некоторого интервала (см. рис. 6):

$$\psi_-(l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{km}, l_{kn}) \leq l_{mn} \leq \psi_+(l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{km}, l_{kn}).$$

Но если взять произвольный симплекс $\sigma_5 = \{i, k, m, n, p\} \subset \mathfrak{M}_3$, состоящий из *пяти* точек, то одно из десяти взаимных расстояний $l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{ip}, l_{km}, l_{kn}, l_{kp}, l_{mn}, l_{mp}, l_{mn}$ является двузначной функцией остальных девяти (см. рис. 7).

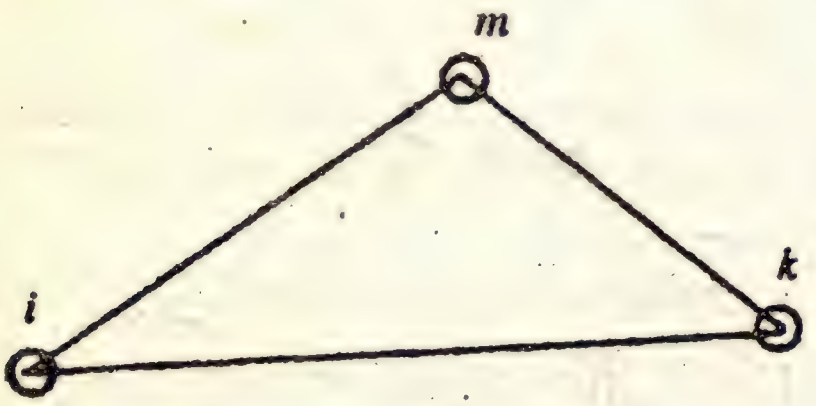


Рис. 5. Симплекс $\sigma_3 = \{i, k, m\} \subset \mathfrak{M}$; при фиксированных значениях l_{ik} и l_{im} значение l_{km} не определено

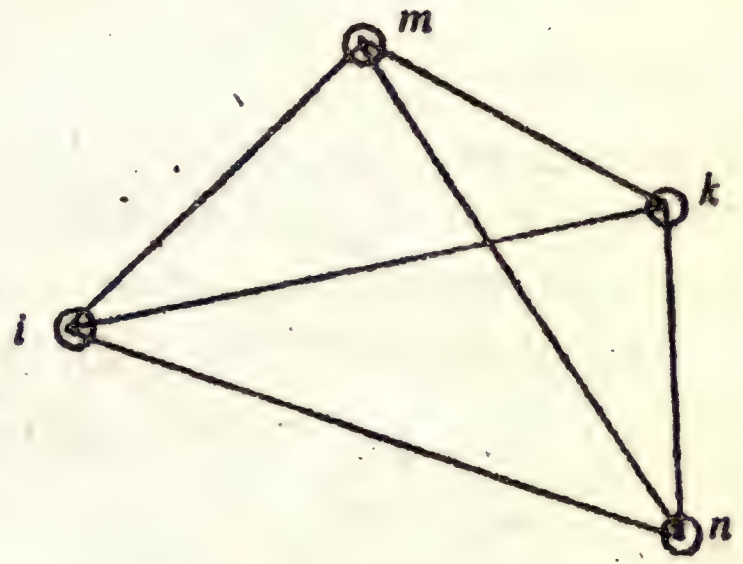
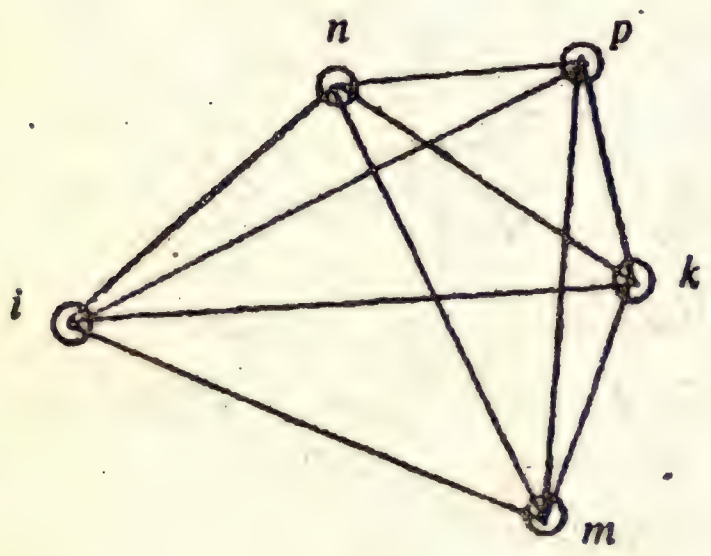


Рис. 6. Симплекс $\sigma_4 = \{i, k, m, n\} \subset \mathfrak{M}_3$; при фиксированных значениях $l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{km}, l_{kn}$ значение l_{mn} не определено



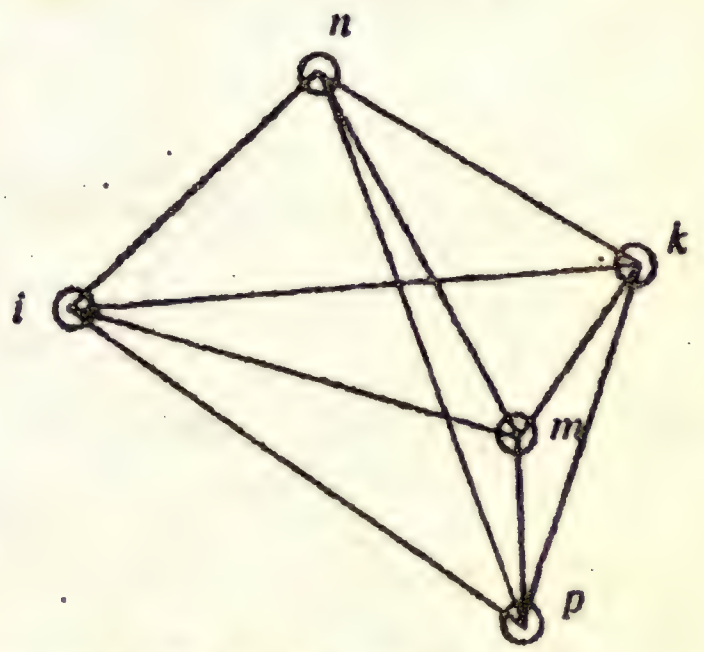


Рис.7. Симплексы $\sigma_4 = \{i, k, m, n, p\} \subset \mathfrak{M}$; девять расстояний $l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{ip}, l_{km}, l_{kn}, l_{kp}, l_{mn}, l_{mp}$ определяют собой два значения l_{np}

Чтобы получить наиболее естественным путем конкретное выражение для этой функции, имеющей для понимания дальнейшего чрезвычайно важное значение, рассмотрим сначала общие свойства множеств точек одномерного, двумерного и трехмерного евклидовых пространств.

2. Простейшие соотношения между расстояниями на прямой

Пусть $\mathfrak{M}_1 = \{i_1, i_2, \ldots,\}$ — множество точек, лежащих на прямой. Рассмотрим симплекс $\sigma_3 = \{i, k, m\} \subset \mathfrak{M}_1$, состоящий из трех произвольных точек $i, k, m \in \mathfrak{M}_1$, и три соответствующие ему расстояния:

$$l_{ik}, l_{im}, l_{km}.$$

Поскольку три точки i, k, m лежат на одной прямой, то площадь треугольника S_{ikm} с вершинами i, k, m очевидно равна нулю при любом взаимном расположении точек i, k, m.

Используя формулу Герона Александрийского (62 н.э.—150 н.э.)

$$S_{ikm} = \sqrt{p(p-l_{ik})(p-l_{im})(p-l_{km})},$$

где $p = 1/2(l_{ik} + l_{im} + l_{km})$

или

$$S_{ikm} = \frac{1}{4}\sqrt{(l_{ik}+l_{im}+l_{km})(l_{ik}+l_{im}-l_{km})(l_{ik}-l_{im}+l_{km})(-l_{ik}+l_{im}+l_{km})} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2!}\sqrt{2(l_{ik}^2 l_{im}^2 + l_{im}^2 l_{km}^2 + l_{km}^2 l_{ik}^2) - l_{ik}^4 - l_{im}^4 - l_{km}^4} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 2!}\left((-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{im}^2 \\ 1 & l_{ik}^2 & 0 & l_{km}^2 \\ 1 & l_{im}^2 & l_{km}^2 & 0 \end{vmatrix}\right)^{1/2}$$

или

$$S_{ikm} = \frac{1}{2\cdot 2!}\left(D^1_{ikm,ikm}\right)^{1/2},$$

где

$$D^1_{ikm,ikm} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l^2_{ik} & l^2_{im} \\ 1 & l^2_{ik} & 0 & l^2_{km} \\ 1 & l^2_{im} & l^2_{km} & 0 \end{vmatrix}$$

трехточечный определитель Кэли–Менгера, можно придать этому утверждению вид универсального соотношения, связывающего три квадрата взаимных расстояний

$$a_{ik} = l^2_{ik}, \quad a_{im} = l^2_{im}, \quad a_{km} = l^2_{km}$$

произвольного симплекса $\sigma_3 = \{i, k, m\}$ одномерного евклидова пространства:

$$\forall i, k, m \in \mathfrak{M}_1;$$

$$\Phi\begin{pmatrix} a_{ik}, a_{im} \\ a_{km} \end{pmatrix} = D^1_{ikm,ikm} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{km} \\ 1 & a_{im} & a_{km} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.9.1)$$

3. Простейшее соотношение между расстояниями на плоскости

Пусть $\mathfrak{M}_2 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ — множество точек, лежащих на одной плоскости. Рассмотрим симплекс $\sigma_4 = \{i, k, m, n\} \subset \mathfrak{M}_2$, состоящий из четырех произвольных точек $i, k, m, n \in \mathfrak{M}_2$, и шесть соответствующих ему расстояний

$$l_{ik}, l_{im}, l_{in},$$
$$l_{km}, l_{kn},$$
$$l_{mn}.$$

Поскольку четыре точки i, k, m, n лежат на одной и той же плоскости, то объем тетраэдра с вершинами i, k, m, n очевидно равен нулю при любом взаимном расположении точек i, k, m, n.

Воспользовавшись формулой Никколо Тартальи (1499—1557), выражающей, подобно формуле Герона, объем тетраэдра через длины ребер:

$$V_{ikmn} = \frac{1}{2^{3/2} \cdot 3!} \left(D^1_{ikmn,ikmn} \right)^{1/2},$$

где*)

$$D^1_{ikmn,ikmn} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ell^2_{ik} & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} \\ 1 & \ell^2_{ik} & 0 & \ell^2_{im} & \ell^2_{in} \\ 1 & \ell^2_{im} & \ell^2_{km} & 0 & \ell^2_{mn} \\ 1 & \ell^2_{in} & \ell^2_{kn} & \ell^2_{mn} & 0 \end{vmatrix}$$

— четырехточечный определитель Кэли–Менгера, можно придать этому утверждению вид универсального соотношения, связывающего шесть квадратов взаимных расстояний:

$$a_{ik},\ a_{im},\ a_{in},$$
$$a_{km},\ a_{kn},$$
$$a_{mn}.$$

где $a_{ik} = \ell^2_{ik}$

произвольного симплекса $\sigma_4 = \{i, k, m, n\}$ двумерного евклидова пространства:

$$\forall i,k,m,n \in \mathfrak{M}_2; \qquad (1.9.2)$$

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{ik}, a_{im}, a_{in} \\ a_{km}, a_{kn} \\ a_{mn} \end{pmatrix} = D^1_{ikmn,ikmn} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ 1 & a_{im} & a_{km} & 0 & a_{mn} \\ 1 & a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Простейшее соотношение между расстояниями в трехмерном евклидовом пространстве

Пусть $\mathfrak{M}_3 = \{i_1, i_2, \ldots\}$ — множество точек, произвольно расположенных в трехмерном евклидовом пространстве.

---

*) В более общем случае подобной формулы перед определителем будет стоять множитель $(-1)^n$.

Рассмотрим произвольный симплекс $\sigma_5 = \{i, k, m, n, p\} \in \mathfrak{M}_3$ и десять соответствующих ему расстояний:

$$l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{ip},$$
$$l_{km}, l_{kn}, l_{kp},$$
$$l_{mn}, l_{mp},$$
$$l_{np}.$$

Рассматривая трехмерное евклидово пространство как трехмерную гиперплоскость в четырехмерном евклидовом пространстве, можно утверждать, что объем V_{ikmnp} четырехмерного симплекса $\sigma_5 = \{i, k, m, n, p\}$, пять вершин которого $i, k, m, n, p \in \mathfrak{M}_3$ лежат на одной и той же трехмерной гиперплоскости, равен нулю.

Воспользовавшись формулой для объема четырехмерного симплекса

$$V_{ikmnp} = \frac{1}{2^2 4!} (D^1_{ikmnp,ikmnp})^{1/2},$$

где

$$D^1_{ikmnp,ikmnp} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l^2_{ik} & l^2_{im} & l^2_{in} & l^2_{ip} \\ 1 & l^2_{ik} & 0 & l^2_{km} & l^2_{kn} & l^2_{kp} \\ 1 & l^2_{im} & l^2_{km} & 0 & l^2_{mn} & l^2_{mp} \\ 1 & l^2_{in} & l^2_{kn} & l^2_{mn} & 0 & l^2_{np} \\ 1 & l^2_{ip} & l^2_{kp} & l^2_{mp} & l^2_{np} & 0 \end{vmatrix}.$$

— пятиточечный определитель Кэли–Менгера, можно придать этому утверждению вид универсального соотношения, связывающего десять квадратов взаимных расстояний:

$$a_{ik}, a_{im}, a_{in}, a_{ip},$$
$$a_{km}, a_{kn}, a_{kp},$$
$$a_{mn}, a_{mp},$$
$$a_{np},$$

где $a_{ik} = l^2_{ik}$

произвольного симплекса $\sigma_5 = \{i, k, m, n, p\}$ трехмерного евклидова пространства:

$$\forall i,k,m,n,p \in \mathfrak{M}_3;$$

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{ik}, a_{im}, a_{in}, a_{ip} \\ a_{km}, a_{kn}, a_{kp} \\ a_{mn}, a_{mp} \\ a_{np} \end{pmatrix} = D^1_{ikmnp,\, ikmnp} \doteq$$

$$= (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{im} & a_{in} & a_{kp} \\ 1 & a_{im} & a_{km} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ 1 & a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 0 & a_{np} \\ 1 & a_{ip} & a_{kp} & a_{mp} & a_{np} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.9.3)$$

Итак, мы видим, что три квадрата расстояний между *тремя* произвольными точками на прямой связаны между собой соотношением (1.9.1), шесть квадратов расстояний между *четырьмя* произвольно расположенными точками на плоскости связаны между собой соотношением (1.9.2) и десять квадратов расстояний между *пятью* точками в трехмерном евклидовом пространстве связаны между собой соотношением (1.9.3). Исходя из этих примеров, сформулируем понятие физической структуры произвольного ранга на одном множестве элементов. Но прежде всего введем понятие системы эталонов и системы координат на одном многообразии.

§ 1.10. Система эталонов и система координат на одном многообразии $\mathfrak{M}$

Пусть $\mathfrak{M}$ — дифференцируемое многообразие размерности m. Рассмотрим некоторую непрерывную, достаточно гладкую функцию $2m$ переменных, характеризующую отношения между двумя элементами $i, k \in \mathfrak{M}$,

$$a_{ik} = \varphi\left(x_1(i),\ldots, x_m(i); x_1(k),\ldots, x_m(k)\right). \qquad (1.10.1)$$

Будем называть эту функцию репрезентатором (парным отношением структуры на одном множестве элементов).

Выберем из многообразия $\mathfrak{M}$ m произвольных элементов $\underline{i},\ldots, \underline{m} \in \mathfrak{M}$ — *систему эталонов из многообразия* $\mathfrak{M}$ с координатами

$$x_1(\underline{1}),\ldots, x_m(\underline{1});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1(\underline{m}),\ldots, x_m(\underline{m}).$$

Отношения произвольного элемента $i \in \mathfrak{M}$ с m базисными элементами $\underline{1},\ldots, \underline{m} \in \mathfrak{M}$ (см. рис. 8) характеризуются m равенствами:

$$a_{i\underline{1}} = \varphi\left(x_1(i),\ldots, x_m(i); x_1(\underline{1}),\ldots, x_m(\underline{1})\right);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i\underline{m}} = \varphi\left(x_1(i),\ldots, x_m(i); x_1(\underline{m}),\ldots, x_m(\underline{m})\right),$$

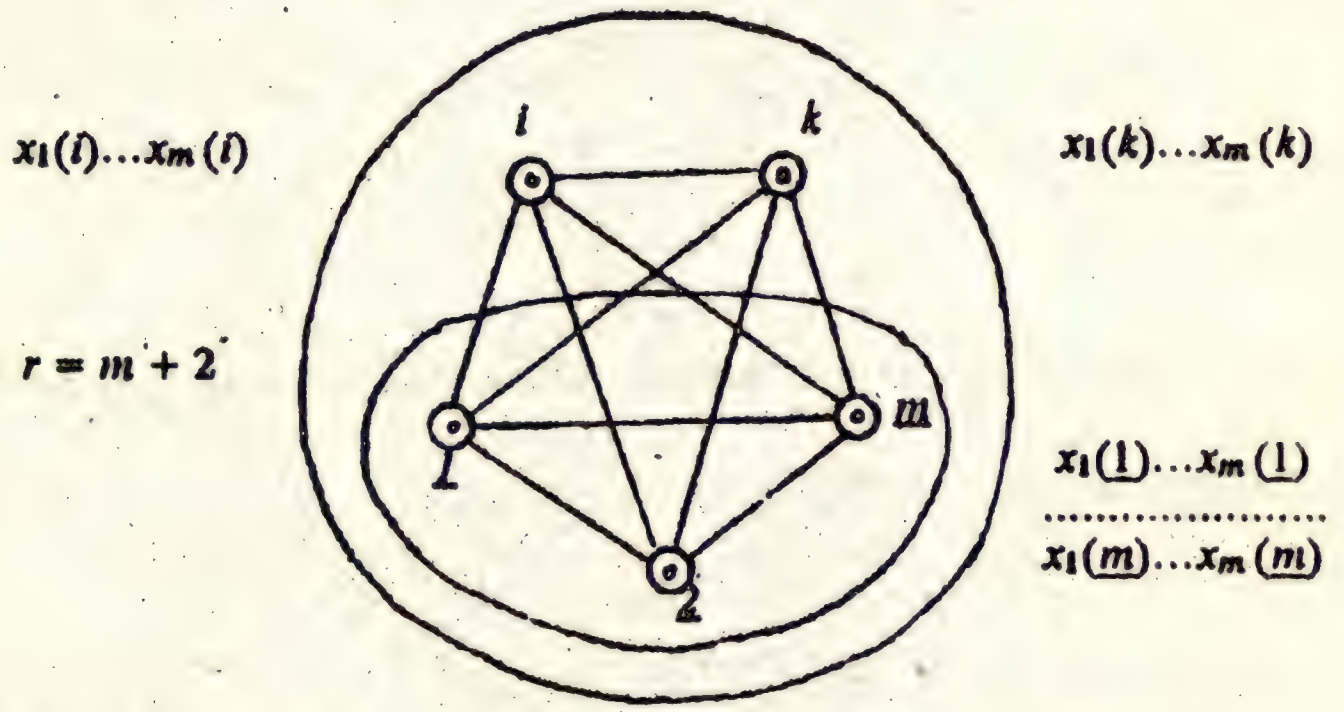


Рис. 8. Физическая структура ранга $r = m+2$; диаграмма отношений объектов $i, k \in M$ с эталонами системы и между собой

разрешая которые относительно $x_1(i),\ldots, x_m(i)$, будем иметь следующие выражения для координат элемента $i \in \mathfrak{M}$:

$$x_\mu(i) = x_\mu\left(a_{i\underline{1}},\ldots, a_{i\underline{m}};\ \begin{matrix} x_1(\underline{1}),\ldots, x_m(\underline{1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1(\underline{m}),\ldots, x_m(\underline{m}) \end{matrix}\right),$$

$\mu = 1, 2, \ldots, m.$

С другой стороны, m^2 координат

$$x_1(\underline{1}),\ldots, x_m(\underline{1});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1(\underline{m}),\ldots, x_m(\underline{m})$$

связаны друг с другом $\frac{1}{2}m(m-1)$ соотношениями:

$$a_{\underline{pq}} = \varphi\left(x_1(\underline{p}),\ldots, x_m(\underline{p}); x_1(\underline{q}),\ldots, x_m(\underline{q})\right);$$
$$1 \le p < q \le m.$$

Таким образом, координаты $x_\mu(\underline{t})(\mu = 1, 2,\ldots, m; t = 1, 2,\ldots, m)$ могут быть выражены через $\frac{1}{2}m(m-1)$ репрезентаторов (парных отношений $)a_{\underline{pq}}$ и

$$m^2 - \tfrac{1}{2}m(m-1) = \tfrac{1}{2}m(m+1)$$

произвольных параметров:

$$C_{11}, C_{12},\ldots C_{1m},$$
$$C_{22},\ldots C_{2m},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{mn},$$

которые мы будем называть *системой координат на многообразии* $\mathfrak{M}$.

Итак, имеем

$$x_\mu(\underline{t}) = x_{\mu\underline{t}}\begin{pmatrix} a_{\underline{12}}, a_{\underline{13}},\ldots, a_{\underline{1m}}, & C_{11}, C_{12},\ldots, C_{1m} \\ a_{\underline{23}},\ldots, a_{\underline{2m}}, & C_{22},\ldots, C_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{\underline{m-1,m}} & C_{mm} \end{pmatrix}.$$

Зная $x_\mu(\underline{t})$, находим координаты элемента $i \in \mathfrak{M}$

$$x_\mu(i) = x_\mu\begin{pmatrix} a_{i\underline{1}},\ldots, a_{i\underline{m}} & a_{\underline{12}}, a_{\underline{13}},\ldots, a_{\underline{1m}}, & C_{11}, C_{12},\ldots, C_{1m} \\ & a_{\underline{23}},\ldots, a_{\underline{2m}}, & C_{22},\ldots, C_{2m} \\ & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ & a_{\underline{m-1,m}} & C_{mm} \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученные выражения для координат $x_\mu(i)$ и $x_\mu(k)$ в исходное соотношение (1.10.1), получим окончательное выражение для репрезентатора (парного отношения)

$$a_{ik} = \varphi\left(x_1(i),\ldots, x_m(i); x_1(k),\ldots, x_m(k)\right) =$$

$$= f\left(\begin{array}{|l|l} \hline a_{i\underline{1}}, a_{i\underline{2}}, a_{i\underline{3}}, \ldots, a_{i\underline{m}}; & C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1m} \\ \hline a_{k\underline{1}}, a_{k\underline{2}}, a_{k\underline{3}}, \ldots, a_{k\underline{m}}; & C_{22}, \ldots, C_{2m} \\ \hline a_{\underline{12}}, a_{\underline{13}}, \ldots, a_{\underline{1m}} & \ldots\ldots\ldots \\ a_{\underline{23}}, \ldots, a_{\underline{2m}}; & C_{mm} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{\underline{m-1,m}} & \\ \hline \end{array}\right).$$

При этом возникает следующая математическая задача: найти такую функцию $2m$ переменных $\varphi(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m)$, при которой репрезентатор a_{ik} не зависел бы от системы координат:

$$C_{11}, C_{12}, \ldots C_{1m},$$
$$C_{22}, \ldots C_{2m},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{mn}$$

или, другими словами, найти такую функцию $2m$ переменных

$$a_{ik} = \varphi\left(x_1(i), \ldots, x_m(i); x_1(k), \ldots, x_m(k)\right),$$

что при заданном целом натуральном числе $r = m + 2$ (число r называется *рангом* физической структуры на одном множестве) $\frac{r(r-1)}{2}$ функций a_{pq} $(1 \leq p < q \leq r)$ таблицы

$$\begin{array}{|l|l|} \hline a_{ik} & a_{i\underline{1}}, a_{i\underline{2}}, a_{i\underline{3}}, \ldots, a_{i\underline{m}} \\ \hline & a_{k\underline{1}}, a_{k\underline{2}}, a_{k\underline{3}}, \ldots, a_{k\underline{m}} \\ \hline & a_{\underline{12}}, a_{\underline{13}}, \ldots, a_{\underline{1m}} \\ & a_{\underline{23}}, \ldots, a_{\underline{2m}} \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & a_{m-1,m} \\ \hline \end{array}$$

были бы связаны между собой одним функциональным соотношением:

$$\Phi\begin{pmatrix} a_{ik}, a_{i\underline{1}}, a_{i\underline{2}}, \ldots, a_{i\underline{m}} \\ a_{k\underline{1}}, a_{k\underline{2}}, \ldots, a_{k\underline{m}} \\ a_{\underline{12}}, \ldots, a_{1\underline{m}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m-1,m} \end{pmatrix} = 0.$$

§ 1.11. Физическая структура ранга r на одном множестве

Определение 2. Мы будем говорить, что на дифференцируемом многообразии $\mathfrak{M}$ размерности m определена физическая структура ранга $r = m+2$, если для любых $i, k \in \mathfrak{M}$ существует непрерывная, достаточное число раз дифференцируемая функция $2m$ переменных — репрезентатор (парное отношение)

$$a_{ik} = \varphi\left(x_1(i), \ldots, x_m(i); x_1(k), \ldots, x_m(k)\right),$$

такой, что $\frac{1}{2}r(r-1)$ репрезентаторов $a_{ik} (1 \leq i < k \leq r)$ связаны между собой одним функциональным соотношением:

$$\Phi\begin{pmatrix} a_{i_1 i_2} & a_{i_1 i_3} \ldots a_{i_1 i_r} \\ & a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_2 i_r} \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & a_{i_{r-1} i_r} \end{pmatrix} = 0.$$

Задача состоит в том, чтобы при заданном r (или $m = r-2$) найти заранее неизвестные функции

$$\varphi : \mathfrak{R}^m \times \mathfrak{R}^m \to \mathfrak{R};$$

$$\Phi : \mathfrak{R}^{1/2 r(r-1)} \to \mathfrak{R},$$

обращающие равенство (1.11.1) в тождество относительно системы mr независимых переменных:

$$x_1(i_1), \ldots x_m(i_1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1(i_r), \ldots x_m(i_r).$$

В отличие от полностью решенной задачи нахождения всех физических структур произвольного ранга (r,s) на двух множествах, задача нахождения физических структур на одном множестве реше-

на лишь в случаях, когда ранг структуры равен трем, четырем и пяти. Рассмотрим найденные физические структуры.

Физическая структура ранга 3 на одном множестве.

Задача состоит в том, чтобы найти две неизвестные функции $\varphi(x(i), x(k))$ и $\Phi : \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}$ такие, чтобы равенство

$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi_{ik}, \varphi_{im} \\ \varphi_{km}\end{pmatrix} = 0$$

обращалось в тождество относительно всех трех независимых переменных

$$x(i),$$
$$x(k),$$
$$x(m).$$

Эта задача была впервые решена Г.Г.Михайличенко [31]. Он показал, что в этом случае репрезентатор $\varphi(x_i, x_k)$ имеет вид:

$$\varphi(x_i, x_k) = \chi(g(x_i) - g(x_k)),$$

где $\chi(z)$, $g(x)$ — произвольные функции одной переменной и, соответственно,

$$\Phi\begin{pmatrix}\varphi_{12}, \varphi_{13} \\ \varphi_{23}\end{pmatrix} = \chi^{-1}(\varphi_{12}) + \chi^{-1}(\varphi_{23}) - \chi^{-1}(\varphi_{13}),$$

где χ^{-1} — функция, обратная χ.

Таким образом, можно показать, что закон аддитивности расстояний

$$l_{ik} + l_{km} - l_{im} = 0$$

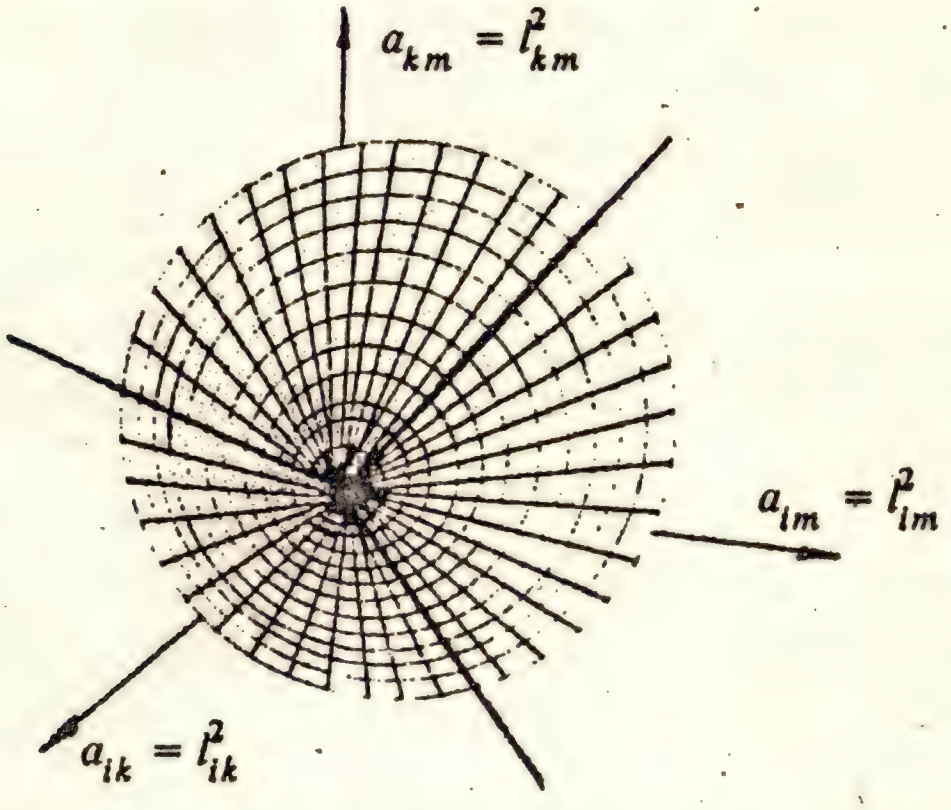
не является случайным, а представляет собой следствие из существования физической структуры ранга 3 на одном множестве (либо бинарной физической структуры ранга (2,2)).

Уже на примере евклидовой прямой мы встречаемся с особым типом коллективных или полиарных (в данном случае тернарных) отношений между точками.

Так, в нашем конкретном случае *тернарные* отношения проявляют себя, если рассматривать множество всех симплексов σ_3, состоящих из трех *точек* евклидовой прямой. Мы видим, что между тремя произвольными точками i, k, m евклидовой прямой существует какая-то необычная связь: с одной стороны, точки i, k, m со-

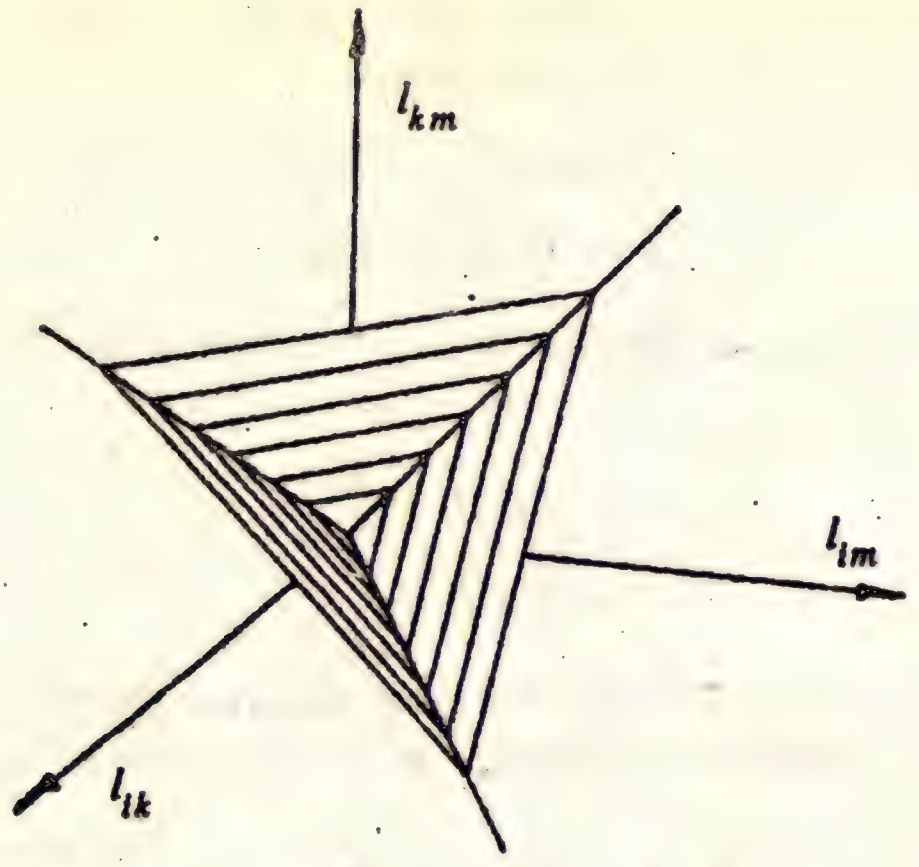
вершенно произвольны, а с другой — три квадрата расстояний $a_{ik} = l^2_{ik}$, $a_{im} = l^2_{im}$, $a_{km} = l^2_{km}$ не являются произвольными, так как связаны между собой соотношением (1.9.1), и один из них является двузначной функцией двух других.

Рассматривая каждый симплекс σ_3 как некоторый единый физический объект, мы можем приписать ему три числа (три измеряемых на опыте квадрата расстояний). Трактуя их как три координаты симплекса σ_3 в трехмерном арифметическом пространстве $\mathfrak{R}_3$, мы тем самым сопоставляем каждому симплексу σ_3 некоторую точку в $\mathfrak{R}_3$. Эту точку мы будем называть характеристической точкой симплекса σ_3, а само арифметическое пространство $\mathfrak{R}_3$ — характеристическим пространством. Факт существования соотношения (1.9.1) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам σ_3, располагаются в трехмерном характеристическом пространстве $\mathfrak{R}_3$ не произвольно, а на некоторой двумерной поверхности (см. рис. 9 и 10), что и означает существование на прямой $\mathfrak{M}_1$ физической структуры ранга 3.



$$a^2_{ik} + a^2_{im} + a^2_{km} - 2(a_{ik}a_{im} + a_{im}a_{km} + a_{km}a_{ik}) = 0$$

Рис. 9. Характеристическая поверхность физической структуры ранга 3 в координатах a_{ik}, a_{im}, a_{km}



$$l_{ik}^4 + l_{im}^4 + l_{km}^4 - 2(l_{ik}^2 l_{im}^2 + l_{im}^2 l_{km}^2 + l_{km}^2 l_{ik}^2) = 0$$

Рис. 10. Характеристическая поверхность физической структуры ранга 3 в координатах l_{ik}, l_{im}, l_{km}

Физическая структура ранга 4 на одном множестве.

Задача состоит в том, чтобы найти две неизвестные функции

$$\varphi\left(x_1(i), x_2(i); x_1(k), x_2(k)\right) \text{ и } \Phi: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R},$$

такие, чтобы равенство

$$\Phi\begin{pmatrix} \varphi_{ik}, \varphi_{im}, \varphi_{in} \\ \varphi_{km}, \varphi_{kn} \\ \varphi_{mn} \end{pmatrix} = 0 \qquad (1.11.2)$$

обращалось в тождество относительно всех восьми независимых переменных:

$$\begin{aligned} &x_1(i),\ x_2(i), \\ &x_1(k),\ x_2(k), \\ &x_1(m),\ x_2(m), \\ &x_1(n),\ x_2(n). \end{aligned}$$

Задача эта, несравненно более сложная, чем нахождение физической структуры ранга 3, была решена одним методом Г.Г.Михайличенко [32], [33] и другим методом В.Х.Львом [34]. Г.Г.Михайли-

ченко первый доказал, что уравнение (1.11.2) допускает девять и только девять (!) независимых решений

$$\varphi_s\left(x_1(i), x_2(i); x_1(k), x_2(k)\right) = \chi\left(a_s(x_i, y_i; x_k, y_k)\right),$$
$$(s = 1, 2, \ldots, 9),$$

где $\chi(z)$ — произвольная функция одной переменной, имеющая обратную χ^{-1};

$$x_i = x\left(x_1(i), x_2(i)\right);$$
$$y_i = y\left(x_1(i), x_2(i)\right).$$

Здесь $x(u,v)$ и $y(u,v)$ — две произвольные функции двух переменных, разрешимые относительно u, v. Эти решения означают:

$$a_1(x_i, y_i; x_k, y_k) = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2;$$
$$a_2(x_i, y_i; x_k, y_k) = (x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2;$$

$$\Phi_{1,2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ 1 & a_{im} & a_{km} & 0 & a_{mn} \\ 1 & a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_3(x_i, y_i; x_k, y_k) = \sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2} \cdot \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2} + x_i x_k + y_i y_k;$$

$$a_4(x_i, y_i; x_k, y_k) = \sqrt{1 - x_i^2 + y_i^2} \cdot \sqrt{1 - x_k^2 + y_k^2} + x_i x_k + y_i y_k;$$

$$a_5(x_i, y_i; x_k, y_k) = \sqrt{1 + x_i^2 + y_i^2} \cdot \sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2} + x_i x_k + y_i y_k;$$

$$\Phi_{3,4,5} = \begin{vmatrix} 1 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ a_{ik} & 1 & a_{km} & a_{kn} \\ a_{im} & a_{km} & 1 & a_{mn} \\ a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_6(x_i, y_i; x_k, y_k) = x_i y_k - x_k y_i;$$

$$\Phi_6 = \begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} \\ -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_7(x_i, y_i; x_k, y_k) = (x_i - x_k)^2 \, e^{\frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}};$$

$$a_8(x_i, y_i; x_k, y_k) = \left[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2\right] e^{\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}};$$

$$a_9(x_i, y_i; x_k, y_k) = \left[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2\right] e^{\gamma \operatorname{Arcth} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}};$$

Функции $\Phi_{7,8,9}$ через элементарные функции не выражаются.

Итак, если в основание двумерной геометрии положить принцип феноменологической симметрии ранга 4, т.е. требование, чтобы шесть переменных (играющая роль "квазиметрики"):

$$\varphi_{ik}, \varphi_{im}, \varphi_{in},$$
$$\varphi_{km}, \varphi_{in},$$
$$\varphi_{mn},$$

относящиеся к четырем произвольным точкам $i, k, m, n \in \mathfrak{M}_2$, были бы связаны между собой одним функциональным соотношением

$$\Phi\begin{pmatrix} \varphi_{ik}, \varphi_{im}, \varphi_{in}, \\ \varphi_{km}, \varphi_{in}, \\ \varphi_{mn}, \end{pmatrix} = 0,$$

то можно показать, что получаются девять и только девять различных двумерных геометрий:

a_1 — евклидова геометрия;

a_2 — псевдоевклидова геометрия;

a_3 — геометрия Римана (сферическая геометрия постоянной положительной кривизны);

a_4 — геометрия на поверхности сферы вещественного радиуса в псевдоевклидовом трехмерном пространстве;

a_5 — геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия постоянной отрицательной кривизны);

a_6 — симплектическая геометрия;

a_7, a_8, a_9 — новые, еще неизвестные, "экзотические" геометрии.

Заметим, что на примере евклидовой плоскости мы встречаемся с новым типом коллективных или полиарных (в данном случае тетрарных) отношений между точками.

Тетрарные отношения наблюдаются, если рассматривать множество всех симплесов σ_4, состоящих из произвольных четырех точек, лежащих на одной евклидовой плоскости. Как и в случае прямой, между четырьмя точками плоскости существует неожиданная связь: с одной стороны, точки i, k, m, n совершенно произвольны, а с другой — шесть значений квадратов расстояний a_{ik}, a_{im}, a_{in}, a_{km}, a_{kn}, a_{mn} связаны между собой соотношением (1.9.2).

Рассматривая каждый симплекс σ_4 как некоторый единый физический объект, мы можем сопоставить с ним одну характеристическую точку в шестимерном арифметическом пространстве $\mathfrak{R}^6$, если в качестве ее шести координат выберем шесть значений a_{ik}.

Факт существования соотношения (1.9.2) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам σ_4, располагаются в $\mathfrak{R}^6$ не произвольно, а на некоторой пятимерной гиперповерхности, что и означает на геометрическом языке существование физической структуры ранга 4 на евклидовой плоскости.

Физическая структура ранга 5 на одном множестве

Задача состоит в том, чтобы найти две неизвестные функции

$$\varphi\left(x_1(i), x_2(i), x_3(i); x_1(k), x_2(k), x_3(k)\right) \text{ и } \Phi : \mathfrak{R}^6 \to \mathfrak{R},$$

такие, чтобы равенство

$$\Phi\begin{pmatrix} \varphi_{ik}, \varphi_{im}, \varphi_{in}, \varphi_{ip} \\ \varphi_{km}, \varphi_{kn}, \varphi_{kp} \\ \varphi_{mn}, \varphi_{mp} \\ \varphi_{np} \end{pmatrix} = 0 \qquad (1.11.3)$$

обращалось в тождество относительно всех пятнадцати независимых переменных

$$x_1(i),\ x_2(i),\ x_3(i)$$
$$x_1(k),\ x_2(k),\ x_3(k)$$
$$x_1(m),\ x_2(m),\ x_3(m)$$
$$x_1(n),\ x_2(n),\ x_3(n),$$
$$x_1(p),\ x_2(p),\ x_3(p).$$

Эта задача была решена моим учеником В.Х.Львом [34]. Он первый доказал, что функциональное уравнение (1.11.3) допускает десять и только десять независимых решений:

$$\varphi\left(x_1(i), x_2(i), x_3(i); x_1(k), x_2(k), x_3(k)\right) =$$
$$= \chi\left(a_s(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k)\right)$$
$$s = 1, 2, \ldots, 10,$$

где $\chi(z)$ — произвольная функция одной переменной, имеющая обратную χ^{-1},

$$x_i = x\left(x_1(i), x_2(i), x_3(i)\right);$$
$$y_i = y\left(x_1(i), x_2(i), x_3(i)\right);$$
$$z_i = z\left(x_1(i), x_2(i), x_3(i)\right).$$

Здесь $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ — три произвольные функции трех переменных, разрешимые относительно u,v,w.

Эти решения означают:

$$a_1(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2;$$

$$a_2(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 - (z_i - z_k)^2;$$

$$\Phi_{1,2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ 1 & a_{im} & a_{km} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ 1 & a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 0 & a_{np} \\ 1 & a_{ip} & a_{kp} & a_{mp} & a_{np} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_3(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) =$$
$$= \sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2} \cdot \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2 - z_k^2} + x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k;$$

$$a_4(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) =$$

$$= \sqrt{1 - x_i^2 - y_i^2 + z_i^2} \cdot \sqrt{1 - x_k^2 - y_k^2 + z_k^2} + x_i x_k + y_i y_k - z_i z_k;$$

$$a_5(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) =$$

$$= \sqrt{1 - x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \cdot \sqrt{1 - x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} + x_i x_k - y_i y_k - z_i z_k;$$

$$a_6(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) =$$

$$= \sqrt{1 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \cdot \sqrt{1 + x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} - x_i x_k - y_i y_k - z_i z_k;$$

$$\Phi_{3,4,5,6} = \begin{vmatrix} 1 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ a_{ik} & 1 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ a_{im} & a_{km} & 1 & a_{mn} & a_{mp} \\ a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 1 & a_{np} \\ a_{ip} & a_{kp} & a_{mp} & a_{np} & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_7(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = x_i y_k - x_k y_i + z_i - z_k;$$

$$\Phi_7 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ 1 & -a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ 1 & -a_{im} & -a_{km} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ 1 & -a_{in} & -a_{kn} & -a_{mn} & 0 & a_{np} \\ 1 & -a_{ip} & -a_{kp} & -a_{mp} & -a_{np} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$a_8(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = (x_i - x_k)^2 \, e^{\frac{y_i - y_k + z_i x_k - z_k x_i}{x_i - x_k}};$$

$$a_9(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) =$$

$$= \left[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2\right] e^{\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}} + z_i + z_k;$$

$$a_{10}(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) =$$

$$= \left[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2\right] e^{\gamma \operatorname{Arcth} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}} + z_i + z_k.$$

Последние три решения можно представить в виде:

$$a_8^*(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = \ln (x_i - x_k)^2 + \frac{y_i - y_k + z_i x_k - z_k x_i}{x_i - x_k};$$

$$a_9^*(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = \ln \left[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2\right] + \gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} + z_i + z_k;$$

$$a_{10}^*(x_i, y_i, z_i; x_k, y_k, z_k) = \ln \left[(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2\right] + \gamma \operatorname{Arcth} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} + z_i + z_k.$$

Функции $\Phi_{8,9,10}$ через элементарные функции не выражаются.

Таким образом, если в основание трехмерной геометрии положить принцип феноменологической симметрии ранга 5, т.е. требование, чтобы десять переменных (играющих роль "квазиметрики"), относящиеся к пяти произвольным точкам $i, k, m, n, p \in \mathfrak{M}_3$, были бы связаны между собой одним функциональнм соотношением

$$\Phi \begin{pmatrix} \varphi_{ik}, \varphi_{im}, \varphi_{in}, \varphi_{ip} \\ \varphi_{km}, \varphi_{kn}, \varphi_{kp} \\ \varphi_{mn}, \varphi_{mp} \\ \varphi_{np} \end{pmatrix} = 0,$$

то можно показать, что получаются десять и только десять различных геометрий:

a_1 — евклидова геометрия;

a_2 — псевдоевклидова геометрия;

a_3 — трехмерная геометрия Римана (сферическая геометрия постоянной положительной кривизны);

a_4, a_5 — геометрии на поверхности трехмерной сферы, вложенной в четырехмерные псевдоевклидовы пространства;

a_6 — трехмерная геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия постоянной отрицательной кривизны);

a_7 — геометрия на трехмерной плоскости, вложенной в четырехмерное симплектическое пространство;

a_8, a_9, a_{10} — неизвестные ранее трехмерные "экзотические" геометрии.

На примере физических структур ранга 5 мы встречаемся с отношениями между пятью точками. Такие отношения имеют место, если рассматривать, например, множество всех симплексов σ_5, состоящих из произвольных пяти точек, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве. Как и в случае прямой или плоскости, между пятью произвольными точками трехмерного евклидова пространства существует необычная связь: с одной стороны, точки i, k, m, n, p совершенно произвольны, а с другой — десять значений квадратов расстояний между ними связаны между собой соотношением (1.9.3). Рассматривая каждый симплекс σ_5 как некоторый единый физический объект, мы можем сопоставить с ним одну характеристическую точку в десятимерном арифметическом пространстве $\mathfrak{R}^{10}$,если в качестве ее десяти координат возьмем соответствующие расстояния или их квадраты. Факт существования соотношения (1.9.3) означает, что характеристические точки, соответствующие различным симплексам σ_5 , расположены в $\mathfrak{R}^{10}$ не произвольно, а на некоторой девятимерной поверхности, что и означает существование физической структуры ранга 5 на одном множестве.

§ 1.12. Некоторые выводы

Обращая внимание на факт существования определенной связи между взаимными расстояниями, относящимися к достаточно большому числу точек, и отдавая себе отчет о принципиальном значении этого соотношения для понимания глубокой связи, существующей между евклидовой геометрией и реальным миром, можно сделать следующий шаг и в качестве исходной идеи считать, *что существование подобных соотношений является свойством не только совокупностей материальных точек, но и многих других физических систем.*

Более того, именно этот факт, являющийся основным для теории физических структур, следует признать наиболее фундаментальным физическим законом, лежащим в основании любой последовательной физической теории феноменологического типа, ибо он является как раз тем самым первым звеном, которое соединяет эмпирические свойства реальных физических объектов с абстрактными физическими понятиями и через них с эффективными математическими методами.

Таким образом, в этих соотношениях особенно отчетливо проявляется нечто общее и фундаментальное, присущее всем физическим законам феноменологического типа. Это "нечто" и есть физическая структура, то есть особый тип отношений, в которых находятся, не-

зависимо от их конкретной природы, все физические объекты. И подобно тому, как законы арифметики описывают свойства конечных множеств независимо от природы их элементов, так и аксиомы теории физических структур, лежащие в основании этих специфических отношений и выражающие идею равноправия физических объектов по отношению к тому или иному физическому закону, позволяют описывать все разнообразие фундаментальных физических законов с единой точки зрения, не заслоняя смысла последних несущественными деталями.

ЧАСТЬ 2

БИНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ И ГЕОМЕТРОФИЗИКА

ГЛАВА 2.1

ФИЗИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ПРОГРАММА ПОСТРОЕНИЯ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВА–ВРЕМЕНИ И ФИЗИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

§ 2.1. Что такое теория физических структур

После изложения сути и назначения теории физических структур, данного ее автором, нелишним будет еще раз охарактеризовать эту теорию. Отчасти это будет кратким резюме изложенного в предыдущей части книги, а отчасти — освещением предмета под несколько иным углом зрения. Глядя на работы Ю.И.Кулакова [1,18,35,36], легко заметить, что даже его точка зрения на теорию физических структур претерпела изменения. На протяжении ряда лет им искались новые более совершенные формулировки основ теории, расширялась область ее применения. Как увидит читатель, в этой части книги обсуждается применение обобщенной (комплексифицированной) теории физических структур для решения другого круга проблем. Математический аппарат теории физических структур положен в основу разработки качественно иной программы — для построения единой теории пространства–времени и физических взаимодействий. Это определяет несколько иной взгляд на суть теории физических структур.

Прежде всего следует четко разделить математический аппарат теории физических структур и возможные его физические прило-

жения. В названии теории, данном ее автором, эти две части составляют единое целое. Оно отражает цели и мотивы, которыми руководствовался автор при создании теории. Вряд ли название является самым удачным. В истории науки подобных примеров неудачных названий известно множество*) . Может быть, более правильным было бы название "теория фундаментальных отношений", однако главное не в названии, а в сути теории. В этом параграфе ограничимся обсуждением математической части теории.

Математическую часть теории физических структур можно назвать теорией алгебраических отношений между элементами произвольной природы. Предполагается наличие одного или нескольких множеств элементов, между которыми определены отношения. В общем случае отношение — это число (вещественное или комплексное), сопоставляемое паре, тройке, четверке и т.д. элементов, принадлежащих одному или разным множествам. Наиболее важными являются случаи, когда число сопоставляется паре элементов. Именно таковыми являются метрические отношения в общепринятой геометрии или в теории линейных пространств. В этой части книги мы ограничимся именно парными отношениями. Во всяком случае всегда будет подразумеваться, что любые отношения можно выразить через парные.

Если все элементы предполагаются однотипными, т. е. составляют одно множество, то построенную на них теорию будем называть *унарной структурой*, а если элементы составляют два множества и рассматриваются отношения лишь между элементами разных множеств, то построенную на них теорию будем называть *бинарной структурой*. Вообще же можно было бы говорить и о тернарной теории (на трех множествах) и т.д. Однако в группе Кулакова показано, что содержательная теория физических структур возможна лишь на одном или на двух множествах. В этой части книги мы будем опираться на бинарные структуры.

Задание отношений между элементами еще не составляет теории. Необходимо ввести еще какие-то закономерности, т.е. задать свойства этих отношений, которые сделали бы математическую конструкцию содержательной. Таковым простейшим случаем является тот, когда числовые отношения между элементами удовлетворяют

---

*) Например, ныне нам известно, что название "общая теория относительности", данное Эйнштейном теории гравитации, далеко не в полной мере выражает суть этой теории и отражает лишь ход рассуждений, приведших Эйнштейна к созданию этой теории.

неким *алгебраическим соотношениям*. Каким? Простейшее, что можно придумать, это выделить из множеств элементов какие-то подмножества, взять числовые отношения между элементами этого подмножества и предположить, что между ними имеется какое-то алгебраическое соотношение. Оказывается, эта простая мысль содержит в себе чрезвычайно много. Во-первых, она означает введение одной или нескольких целочисленных характеристик теории — *ранга структуры*. Ранг определяет, сколько элементов должно содержать подмножество, для которого имеет место алгебраическое соотношение. Для бинарных структур ранг определяется двумя числами (r,s), характеризующими число элементов в подмножествах соответственно из двух множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Во-вторых, если мы не хотим усложнять рассматриваемые конструкции, естественно предположить, что все элементы из выделенных подмножеств в алгебраическом соотношении присутствуют симметричным образом. Это означает, что для унарных структур ранга r алгебраическое соотношение представляет собой равенство нулю некоторой функции от $C_2^r = r(r-1)/2$ аргументов — парных отношений

$$\Phi(a_{ik}, a_{ij}, \ldots, a_{ls}) = 0, \qquad (2.1.1)$$

где a_{ik} — парное отношение между элементами i и k выделенного подмножества. Для бинарных структур ранга (r, s) алгебраическое соотношение содержит $r \cdot s$ парных отношений и имеет вид

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \ldots, a_{k\alpha}, a_{k\beta}, \ldots, a_{s\sigma}) = 0, \qquad (2.1.2)$$

где $a_{i\alpha}$ — парное отношение между элементами i и α из двух разных множеств. Латинскими буквами будем обозначать элементы множества $\mathfrak{M}$, а греческими — элементы второго множества $\mathfrak{N}$.

В-третьих, опять же, если ограничиться простейшим случаем, нужно допустить, что все элементы, как вошедшие в выделенное подмножество, так и нет, являются равноправными. Это означает, что алгебраические соотношения (2.1.1) и (2.1.2), называемые *законом структуры*, должны выполняться, если произвести замену вошедших в подмножества элементов на произвольные другие, не вошедшие в эти подмножества. Такая симметрия Кулаковым была названа *феноменологической* (или *фундаментальной*) *симметрией*.

После выявления названных трех факторов (ранга и симметрий) оказалось, что они настолько содержательны, что позволяют для случая вещественных отношений определить вид возможных функций $\Phi(\ldots)$ в (2.1.1) и (2.1.2), т.е. установить вид законов физичес-

ких структур. В группе Кулакова найдены все возможные законы для бинарных структур и выявлены все законы для унарных структур низших рангов ($r = 3, 4, 5$). Об этом подробно написано в предыдущей части книги. Эти результаты составляют фундамент теории физических структур. Характерно, что все законы бинарных структур и ряд законов унарных структур выражаются через определители.

При анализе уже известных результатов математической части теории физических структур невольно возникает желание найти в широко разросшемся дереве современной математики ветви (давно сформировавшиеся или недавние побеги), которые бы соответствовали теории структур Кулакова. Такой поиск проводился в группе Кулакова. Высказывался ряд соображений на этот счет, начиная от указаний на связь с теорией категорий и функторов и кончая гипотезой о том, что теория физических структур основывает совершенно новую ветвь математики. По-видимому, к математическому содержанию теории структур можно подойти с разных сторон. Прояснению связей с другими разделами математики несомненно помогут ведущиеся сейчас исследования по аксиоматике теории физических структур [37].

На наш взгляд, *наиболее близким к теории физических структур разделом современной математики является теория линейных пространств.* Элементы теории структур соответствуют векторам линейных пространств, а парные отношения следует сопоставить со скалярными произведениями векторов линейных пространств. Действительно, напомним, что парные отношения a_{ik} для ряда унарных структур (см. формулы § 1.11 в первой части книги) и $a_{i\alpha}$ для диагональных бинарных структур (см. формулы таблицы 1 в первой части книги) соответственно представляются в виде

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{r-1} Z(i)^s Z(k)^s; \quad a_{i\alpha} = \sum_{s=1}^{r-1} i^s \alpha^s. \tag{2.1.3}$$

Они совпадают с определениями скалярных произведений векторов $\vec{x}_i$ и $\vec{x}_k$ в теории $r-1$ -мерных линейных пространств

$$(\vec{x}_i \vec{x}_k) = \sum_{s=1}^{r-1} x_i^s x_k^s, \tag{2.1.4}$$

т.е. параметры элементов указанных структур соответствуют компонентам векторов линейных пространств.

Далее следует напомнить, что в теории линейных пространств широко используются определители Грама и их свойства. Как известно (см., например, [38]), определитель Грама записывается в виде

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k) = \begin{vmatrix} (\vec{x}_1\vec{x}_1) & (\vec{x}_1\vec{x}_2)\ldots(\vec{x}_1\vec{x}_k) \\ (\vec{x}_2\vec{x}_1) & (\vec{x}_2\vec{x}_2)\ldots(\vec{x}_2\vec{x}_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\vec{x}_k\vec{x}_1) & (\vec{x}_k\vec{x}_2)\ldots(\vec{x}_k\vec{x}_k) \end{vmatrix}. \qquad (2.1.5)$$

Известна также теорема, гласящая: "Определитель Грама векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ равен нулю, если эти векторы линейно зависимы, и положителен, если они линейно независимы; он равен произведению квадратов длин векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$, если они взаимно ортогональны, в противном случае он меньше этой величины [38, с.207].

Легко видеть, что законы физических структур, для которых в (2.1.3) выписаны парные отношения, представляют собой не что иное, как равенство нулю соответствующих определителей Грама. Как мы увидим ниже, ключевые понятия теории структур — определители меньшего ранга, нежели законы структуры, — также являются определителями Грама с вытекающими из теоремы свойствами.

Таким образом, на указанные частные виды физических структур, с одной стороны, и теорию линейных пространств, с другой стороны, можно смотреть как на две формулировки одной и той же теории, опирающиеся на разные аксиоматики. Таких примеров достаточно много как в геометрии, так и в физике. Любую теорию, сформулированную аксиоматически, можно перелицевать так, что аксиомы в одной ее формулировке станут теоремами в другой, и наоборот.

Однако часто изменение аксиом не сводится к простой переформулировке, а дает ряд преимуществ для дальнейшего развития теории или ее обобщений. На это неоднократно указывал Р.Фейнман, обсуждая различные формулировки электродинамики и квантовой механики. Теорию физических структур можно рассматривать как такого рода пример плодотворности иной точки зрения для обобщений теории линейных пространств. Так, в теории физических структур решениями являются кроме бинарных структур типа (*б*), представленных в (2.1.3) (будем называть их структурами ранга (r, r; *б*)), еще структуры типа (*а*) с парными отношениями вида

$$a_{i\alpha} = \sum_{s=1}^{r-2} i^s\alpha^s + i^{r-1} + \alpha^{r-1}. \qquad (2.1.6)$$

Будем называть такие структуры структурами ранга $(r,r\,;a)$. Ясно, что скалярные произведения такого типа в теории линейных пространств обычно не рассматриваются. Там они выглядят неестественно.

Структуры типа (a) позволяют обобщить определители Грама на случай "окаймленных определителей Грама"

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta}\ldots a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta}\ldots a_{k\gamma} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta}\ldots a_{j\gamma} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta}\ldots & & a_{i\gamma} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta}\ldots & & a_{k\gamma} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta}\ldots & & a_{j\gamma} \end{vmatrix}, \qquad (2.1.7)$$

обладающих рядом аналогичных свойств. Обращение в нуль такого окаймленного определителя выражает собой закон бинарной физической структуры ранга $(r,r\,;a)$ с парными отношениями (2.1.6). Следовательно, можно говорить об обобщенной теории линейных пространств со скалярным произведением вида (2.1.6) и с окаймленным определителем вида (2.1.7) вместо определителя Грама (2.1.5).

Этим не ограничиваются возможные обобщения теории линейных пространств, навеянные аналогией с теорией физических структур. Можно ввести обобщение по линии недиагональных бинарных физических структур, описанных Кулаковым в таблице 2 первой части книги. Еще больше обобщений можно указать по линии унарных физических структур.

Известно, что теория линейных (вещественных и комплексных) пространств широко используется в современной теоретической физике. Поэтому естественно ожидать, что и указанные здесь обобщения могут найти применение в теоретической физике. Для читателя, не приемлющего по каким–то причинам идеологию теории физических структур, может оказаться более подходящим воспринимать изложенное ниже как применение обобщений теории линейных пространств в теории физических взаимодействий.

§ 2.2. Мотивы применения теории физических структур для построения физической картины мира

Перейдем к вопросу о применении математического аппарата теории структур в физике. Естественно начать с мотивов, заставивших автора этих строк обратиться к теории физических структур. Они частично перекликаются с соображениями Ю.И.Кулакова, но в значительной степени и отличаются. Основными мотивами являются следующие.

Во–первых, я являюсь сторонником тех, кто считает, что физическая теория имеет дело именно с *отношениями одних объектов или явлений к другим,* но ни в коем случае не с объектами самими по себе. Это определяет реляционный подход к природе пространства и времени и соответствующий взгляд на содержание физической теории. Эту же точку зрения выразил Ю.И.Кулаков в первой части книги, а ранее таких же взглядов придерживались Г.Лейбниц, Э.Мах, Р.Фейнман и ряд других известных физиков и естествоиспытателей.

Следует напомнить, что такой подход разделяется далеко не всеми. Имеется противоположная точка зрения, согласно которой пространство–время имеет субстанциальный характер и рассматривается как самостоятельная сущность. Сторонниками второго подхода являлись В.Клиффорд, Дж.Уилер и ряд других исследователей. Со сторонниками таких взглядов полемизировал Э.Мах. Так, он писал: "Никто не может ничего сказать об абсолютном пространстве и абсолютном движении, это нечто, лишь мыслимое, на опыте не обнаружимое. Все наши основные законы механики представляют собой, как это уже было подробно показано, данные опыта об относительных положениях и движениях тел" [39, с.54]. "Точно так же мы не можем говорить о некоем "абсолютном времени" (независимо от всякого изменения). Такое абсолютное время не может быть измерено никаким движением и потому не имеет ни практического, ни научного значения" [39, с.50].

Если в физической теории вслед за Лейбницем, Махом, Фейнманом *признать ключевой характер отношений между объектами и реляционное понимание пространства–времени, то естественно использовать и математический аппарат отношений между элементами (объектами), каковым и является теория физических структур.*

Во–вторых, автору этих строк всегда представлялось, что классические пространственно–временные отношения не являются первичными. Они справедливы лишь для классических тел — макрообъектов и теряют силу за пределами явлений и областей привычного нам масштаба. Как свидетельство этому следует воспринимать закономерности квантовой механики и физики элементарных частиц (в микромире) и общей теории относительности (в больших масштабах). Естественно допустить, что классические пространственно–временные отношения должны возникнуть из более фундаментальных отношений микромира как составные, вторичные понятия.

Согласно изложенному о сути математической части теории физических структур, эта теория применима для описания абстрактных отношений между элементами произвольной природы. Требуется лишь наличие элементов и фундаментальной (феноменологической)

симметрии между ними. По этой причине *естественно попытаться увидеть в закономерностях микромира проявление физических структур и, опираясь на них, понять происхождение и составной характер классических пространственно–временных отношений.*

В–третьих, имеется цикл исследований проблемы размерности классического пространства–времени. Над этой проблемой размышляли еще И.Кант и Э.Мах. Так, в своей книге "Познание и заблуждение" Мах четко сформулировал вопрос: "Почему пространство трехмерно?" [39, с.83]. Позже уже в рамках новой физики этот вопрос детально анализировался в работах П.Эренфеста, А.Эйнштейна, А.Эддингтона и многих других известных авторов. Но до сих пор не было предложено удовлетворительного ответа на этот фундаментальный вопрос. Следует ожидать его решения на путях радикальных изменений представлений о классическом пространстве–времени.

Если удастся подойти к закономерностям классического пространства–времени с позиций теории физических структур, то можно расчитывать и на прогресс в теоретическом обосновании наблюдаемого четырехмерия классичесского пространства–времени. Эта мотивировка применения физических структур тесно связана со второй.

В–четвертых, автор этих строк довольно много времени и усилий посвятил исследованиям многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теории Калуцы–Клейна [5,6]. Основная идея этого направления мировых исследований состоит в предположении, что на самом деле наше *физическое* пространство–время обладает большим числом измерений, нежели наблюдаемое *классическое* четырехмерное пространство–время, но дополнительные размерности оказались скрытыми. Проявления в тех или иных обстоятельствах дополнительных размерностей можно трактовать как наличие электромагнитных (5–е измерение), электрослабых (5–е и 6–е измерения) или сильных (три дополнительных размерности) взаимодействий. Другими словами, совокупность известных фундаментальных физических взаимодействий тесно связывается с иерархией дополнительных размерностей физического пространства–времени.

Опыт исследований многомерных теорий Калуцы–Клейна поучителен для нас в двух отношениях. Первое, — если теория физических структур окажется пригодной для построения теории классического пространства–времени, то можно ожидать, что имеются возможности для описания с ее помощью и физических взаимодействий. Второе, — это то, что для описания совокупности известных взаимодействий нужна иерархия усложняющихся математических конструкций. Как было показано в первой части книги, теория физических структур предоставляет в наше распоряжение подобную иерар-

хию структур (бинарных и унарных), различающихся рангом. Более высокие ранги можно понимать как высшие размерности. Следовательно, *можно попытаться применить иерархию физических структур не только для построения теории классического пространства–времени, но и для описания совокупности известных физических взаимодействий.*

В–пятых, автор этих строк совместно с А.Ю.Турыгиным [7] работал в области специфического варианта описания взаимодействий не в духе традиционной теории поля (близкодействия), а в рамках концепции дальнодействия. Такая теория в современной литературе называется теорией прямого межчастичного взаимодействия. В ее развитие значительный вклад внесли А.Фоккер, Х.Тетроде, Я.И.Френкель, Р.Фейнман и другие физики. Основная идея этого направления исследований состоит в том, что физические взаимодействия рассматриваются как специальные виды отношений непосредственно между частицами. Традиционные поля как переносчики взаимодействий, распространяющиеся в пространстве от точки к точке, в такой теории исключаются.

Легко почувствовать созвучие теории прямого межчастичного взаимодействия идеологии теории физических структур. Элементы теории структур можно поставить в соответствие частицам теории прямого межчастичного взаимодействия, а электромагнитные и иные потенциалы и напряженности можно выразить через отношения между элементами. Характерно, что в обеих теориях отношения задаются глобально, а не только между близко расположенными объектами, как в теории поля. Таким образом, *становится очевидной возможность выразить известные теории электромагнитных и иных взаимодействий в терминах теории физических структур соответствующего ранга.* Основная задача состоит лишь в том, чтобы суметь разгадать (разглядеть), какая структура соответствует тому или иному конкретному физическому взаимодействию.

Имеются и другие мотивы перехода к теории физических структур как к фундаменту теоретической физики.

На первый взгляд, все из упомянутых здесь фундаментальных проблем могут показаться мало связанными друг с другом. Однако открывающаяся в рамках теории физических структур возможность рассмотрения всех их в совокупности единым образом заставляет серьезно к ней отнестись и попытаться эту возможность тщательно исследовать. Анализ показал, что теория физических структур оказалась очень удачной находкой, позволяющей значительно продвинуться в решении упомянутых здесь проблем. Видимо, можно утверждать и обратное, — выделение совокупности названных проблем

позволило положить теорию физических структур в фундамент физической картины мира.

§ 2.3. Программа построения единой теории пространства–времени и физических взаимодействий

Из изложенной мотивировки вырисовывается программа, отличающаяся от развиваемой в группе Ю.И.Кулакова. Напомним, что в физической части программы Кулакова основная задача усматривается в распознании за общепринятыми формулировками известных физических законов проявлений тех или иных физических структур. В группе Кулакова главным образом анализировались физические законы, относящиеся к *общей физике*: 2–й закон Ньютона, закон Ома, законы оптики, термодинамики и т.д. Кроме того, в исследованиях ограничивались лишь физическими структурами с *вещественными отношениями*. Последнее связано с убеждением, что парные отношения физических структур обязательно должны быть измеряемыми на опыте величинами.

Наша программа опирается на предположение (гипотезу, постулат), что бинарные физические структуры могут быть положены в фундамент физики микромира. Оказалось, что иерархия бинарных физических структур низшего ранга действительно позволяет создать цельную конструкцию из понятий и закономерностей, которая может быть сопоставлена с современной теорией микромира, включающей как определения известных спинорных частиц (лептонов, барионов), введение пространственно–временных отношений между ними, так и задание известных фундаментальных физических взаимодействий (электромагнитных, слабых, сильных). Существенно подчеркнуть, что в такой конструкции оказываются задействованными все возможные симметричные (т.е. диагональные ранга (r,r)) бинарные структуры низших рангов (без пропусков) так, что каждая из структур играет в построении физической картины мира свою и только ей присущую принципиально важную роль. Исключение любой из структур приведет к рассыпанию всей конструкции.

Обратим внимание, что данная программа опирается именно на иерархию бинарных физических структур. Почему бинарных? Это обосновывается рядом обстоятельств математического, физического и даже философского характера. Во–первых, как показано в работах Г.Г.Михайличенко [1,2], математическая теория бинарных физических структур значительно проще, чем теория унарных структур. Напомним, что довольно быстро были найдены все возможные бинарные физические структуры, тогда как для каждого ранга унарных структур такая задача должна решаться отдельно. До настоящего

времени задача полностью решена лишь для унарных структур ранга не выше пяти. Во-вторых, от бинарных структур можно перейти к унарным, тогда как наоборот сделать нельзя. Более того, в последнее время Кулаков рассматривает ряд унарных структур как вырожденные бинарные. Все это говорит об элементарном характере именно бинарных структур.

В-третьих, следует напомнить, что бинарность (наличие двух начал) буквально пронизывает всю физику. Как будет показано ниже, бинарность структуры в нашем подходе будет тесно связана с начальными и конечными состояниями систем, т.е. одно множество элементов ($\mathfrak{M}$) бинарной структуры будет описывать начальные состояния (частиц, систем частиц), тогда как второе множество элементов ($\mathfrak{N}$) будет сопоставляться с конечным состоянием. Другими словами можно сказать, что бинарность связана с понятиями причины и следствия.

Ю.И.Кулаков при обосновании предпочтительности бинарных структур часто ссылается на соображения мировоззренческого характера, в частности, упоминает два начала "Инь" и "Ян" восточных философских систем.

Другим существенным отличием нашей программы является использование не вещественных, а *комплексифицированных* бинарных структур. Парные отношения в общем случае будут описываться комплексными числами. Это позволяет резко расширить круг физических понятий и закономерностей, интерпретирумых с помощью физических структур. Здесь следует назвать квантовую теорию, спинорные величины, группы симметрий $SU(2)$, $SU(3)$ и другие используемые в современной теоретической физике разделы и понятия, опирающиеся на поле комплексных чисел. Такое обобщение означает отказ от предположения об обязательной наблюдаемости парных отношений, однако это не лишает содержательности математическую часть теории структур. Более того, ничто не мешает полагать, что наблюдаемые (вещественные) величины выражаются в виде неких функций от комплексных парных отношений, например, как в квантовой механике наблюдаемые строятся из комплексных волновых функций.

Следует заметить, что все найденные законы для бинарных вещественных структур остаются справедливыми и для комплексифицированных структур. Другое дело, что соответствующие теоремы единственности доказаны пока в рамках лишь вещественных структур. Для комплексифицированных структур вопросы единственности следует решать заново. Однако для наших целей знание таких тонкостей не понадобится.

Забегая вперед, постараемся сначала в общих чертах охарактеризовать конструкцию, вырисовывающуюся в ходе реализации сформулированной программы. Итак, иерархия диагональных бинарных структур низшего ранга состоит из структур рангов: (2,2), (3,3), (4,4;а), (4,4;б), (5,5;а),... *Постулируем , что известные виды элементарных частиц (фермионов) строятся из элементов различных структур.* Ниже будет показано, что нейтрино соответствуют отдельным элементам структуры ранга (3,3), массивные лептоны (электроны) строятся из пары элементов структуры ранга (4,4), барионы строятся из трех элементов структуры ранга (5,5),... Подчеркнем, что здесь не конкретизируются типы структуры: (а) или (б), — так, согласно работе В.Х.Льва [3] структуры типа (а) можно рассматривать как вырожденные структуры типа (б). С другой стороны, элементы структуры типа (а) можно рассматривать как элементы структуры на единицу меньшего ранга, обладающие специфической дополнительной компонентой ("хвостом", — см. формулу (2.1.6)). Это позволяет описывать ряд свойств элементарных частиц в рамках структуры на единицу меньшего ранга.

В рамках структуры ранга (3,3;б) описываются отношения между элементами, характеризуемыми парой комплексных компонент. Оказывается, свойства этих отношений соответствуют закономерностям известной теории спиноров в 4–мерном многообразии с сигнатурой (+---). Естественным образом возникают группы $SU(2)$, $SL(2,C)$ и Лоренца. Вводятся биспиноры, спинтензоры, 4–мерные векторы и тензоры. Векторы могут быть как изотропными, так и временно–подобными, т.е. вводятся понятия, присущие массивным лептонам, описываемым следующей структурой. Таким образом, *структуру ранга (3,3;б) можно считать ответственной за размерность и сигнатуру классического пространства–времени.*

Однако возможности этой структуры ограничены. Во–первых, в ее рамках нельзя ввести понятие заряда, во–вторых, невозможно описать эволюцию, в–третьих, нет понятия трансляции и т.д. Анализ показывает, что отношения, описываемые этой структурой, следует трактовать как *отношения в импульсном пространстве.*

Структурой ранга (2,2) описываются отношения между линейно упорядоченными элементами, т.е. с их помощью можно описывать эволюцию. Тогда парные отношения следует физически интерпретировать как *прообраз классического действия.* В рамках этой структуры естественным образом возникает группа трансляций, однако нельзя обосновать размерность, большую двух.

К понятиям классического 4–мерного пространства–времени можно прийти с помощью *композиции*, т.е. своеобразного произведения двух комплексифицированных бинарных структур рангов

(3,3;б) и (2,2). Композиция позволяет объединить достоинства двух структур, в частности, получить группу Пуанкаре из групп Лоренца (структура ранга (3,3;б)) и трансляций (структура ранга (2,2)), но самое главное — она позволяет сопоставить с импульсным пространством *координатное пространство–время* и вместо начальных и конечных состояний структуры ранга (3,3;б) ввести эволюцию системы. Более того, с помощью композиции удается одновременно развить элементы квантовой теории и теории классического пространства–времени.

Элементы структуры ранга (4,4;а) характеризуются двумя спинорными компонентами (как в структуре (3,3;б)) и еще одним дополнительным ("скалярным") параметром. Последний следует интерпретировать как величину, пропорциональную *физическим зарядам*. Поскольку массивный лептон описывается парой элементов структуры ранга (4,4;а), с ним оказываются сопоставленными два дополнительных параметра. Из них можно образовать две независимые комбинации, пропорциональные электрическому заряду и заряду слабых взаимодействий. В итоге оказывается, что в *рамках структуры ранга* (4,4;а) *оказывается возможным описать сразу два вида физических взаимодействий*. В третьей главе этой части книги показывается, что такая теория находится в хорошем соответствии со стандартной моделью электрослабых взаимодействий Вайнберга–Салама. Подчеркнем, что последняя является типично полевой теорией, тогда как наш подход строится в рамках концепции дальнодействия, т.е. соответствует переформулировке модели Вайнберга–Салама в духе теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера–Фейнмана.

Данная информация о структуре ранга (4,4;а) относится к теории в импульсном пространстве. Переход к координатному пространству–времени должен опять осуществляться с помощью композиции двух структур рангов (4,4;а) и (2,2).

В теории структуры ранга (4,4;б) элементы характеризуются тремя равноправными комплексными параметрами. Парные отношения между разноименными элементами оказываются инвариантными относительно группы преобразований SU(3). Это позволяет физически интерпретировать элементы этой структуры как кварки, а их параметры понимать как цветовые компоненты. По образу и подобию теории структуры ранга (3,3;б) удается развить теорию структуры ранга (4,4;б), в частности, можно ввести понятия 3–компонентных спиноров, 6–компонентных биспиноров, спинтезоры, векторы своеобразного 9–мерного многообразия. Но самое важное, уже в рамках этой структуры можно ввести и охарактеризовать ряд свойств барионов как частиц, образованных из трех кварков. Та-

ким образом, уже можно говорить об *элементах теории сильных взаимодействий — о хромодинамике.*

В рамках структуры ранга (5,5;а) появляется возможность поставить задачу объединения теорий сильных и электрослабых взаимодействий, т.е. *приступить к построению теории великого объединения.* Ряд соображений и результатов таких исследований приведен в четвертой главе этой части книги.

Очевидно, что данная программа позволяет идти дальше. Естественно возникают вопросы типа: Что можно ожидать от такой теории, привлекая структуры более высокого ранга? Имеются ли ограничения на ранг допустимых бинарных структур?...

Охарактеризованную здесь теорию предлагается назвать *бинарной геометрофизикой.*

В заключительном разделе этой части книги бинарная геометрофизика, точнее, соответствующая ей физическая парадигма, сопоставлена с другими физическими теориями (программами), развиваемыми в настоящее время. Выявлены общие черты нашей и ряда других программ, а также указаны главные их различия.

ГЛАВА 2.2

БИНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ И ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ КЛАССИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА–ВРЕМЕНИ

§ 2.4. Бинарная структура ранга (3,3;б) и ее физическая интерпретация

1. Итак, согласно изложенному в первой части книги, закон бинарной структуры ранга (3,3;б) означает равенство нулю определителя, построенного из отношений между двумя произвольными тройками элементов i, k, j и α, β, γ из двух множеств

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.4.1)$$

Закон тождественно выполняется, если парные отношения представляются в виде

$$a_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2, \qquad (2.4.2)$$

где i^1 и i^2 — два параметра, сопоставляемые элементам одного множества, а α^1 и α^2 — элементам другого множества. Этот результат был установлен для случая вещественных отношений, но остается справедливым и для комплексных отношений.

2. Опыт рассмотрения геометрий как частных видов унарных физических структур с законами в виде равенства нулю соответствующих определителей (Кэли–Менгера или Грама) показывает, что ключевую роль в геометриях играют аналогичные определители меньшего ранга. Так, в 3–мерной евклидовой геометрии определитель Кэли–Менгера, на ранг ниже определителя в законе, характеризовал 3–мерный объем, еще на ранг ниже — площадь. Аналогично и в данном случае важную роль в теории играет определитель второго ранга. Поэтому назовем *фундаментальным 2×2–отношением* между двумя парами разноименных элементов i, k и α, β значение определителя, образованного из четырех парных отношений между этими элементами. Подставляя в него вид парных отношений (2.4.2), легко показать, что [8]

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}. \qquad (2.4.3)$$

т.е. фундаментальное 2×2–отношение выражается через произведение двух определителей, образованных из параметров пар элементов отдельно двух множеств. Определитель еще меньшего ранга совпадает с парным отношением $a_{i\alpha}$, а других отличных от нуля определителей в теории структуры ранга (3,3;б) нет.

3. Легко видеть, что параметры элементов определены неоднозначно, с точностью до некоторых из линейных преобразований

$$i^{s'} = A^{s}_{.r} i^{r}; \quad \alpha^{s'} = \tilde{A}^{s}_{.r} \alpha^{r}, \qquad (2.4.4)$$

где $s, r = 1, 2$; $A^{s}_{.r}$ и $\tilde{A}^{s}_{.r}$ — пока независимые друг от друга комплексные параметры, характеризующие возможные преобразования. Рассмотрим конкретные случаи, опираясь на предположения о свойствах парных и 2×2–отношений.

Если потребовать инвариантность парных отношений (2.4.2), то получаем 4 комплексных условия на 8 комплексных параметров

$$\begin{gathered} A^{1}_{.1}\tilde{A}^{1}_{.1} + A^{2}_{.1}\tilde{A}^{2}_{.1} = 1; \quad A^{1}_{.2}\tilde{A}^{1}_{.2} + A^{2}_{.2}\tilde{A}^{2}_{.2} = 1; \\ A^{1}_{.1}\tilde{A}^{1}_{.2} + A^{2}_{.1}\tilde{A}^{2}_{.2} = 0; \quad A^{1}_{.2}\tilde{A}^{1}_{.1} + A^{2}_{.2}\tilde{A}^{2}_{.1} = 0. \end{gathered} \qquad (2.4.5)$$

Если потребовать инвариантность фундаментального 2×2–отношения, то естественно выделяется случай, когда инвариантными остаются каждый из определителей справа в (2.4.3) в отдельности. Отсюда следуют условия

$$A^{1}_{.1}A^{2}_{.2} - A^{1}_{.2}A^{2}_{.1} = 0; \quad \tilde{A}^{1}_{.1}\tilde{A}^{2}_{2} - \tilde{A}^{1}_{.2}\tilde{A}^{2}_{.1} = 0. \qquad (2.4.6)$$

Ясно, что при этих условиях парные отношения в общем случае инвариантными оставаться не будут, тогда как закон (2.4.1) будет выполняться.

4. Перейдем к физической интерпретации понятий структуры ранга (3,3;б) в рамках развиваемой здесь программы. Постулируем, что элементы множества $\mathfrak{M}$ (с латинскими индексами) характеризуют *начальные состояния* (неких частиц или их составных частей), а элементы множества $\mathfrak{N}$ (с греческими индексами) соответствуют *конечным состояниям* (частиц или их составных частей) (см. рис.11). Понятие состояния является примитивом теории, т.е. первичным

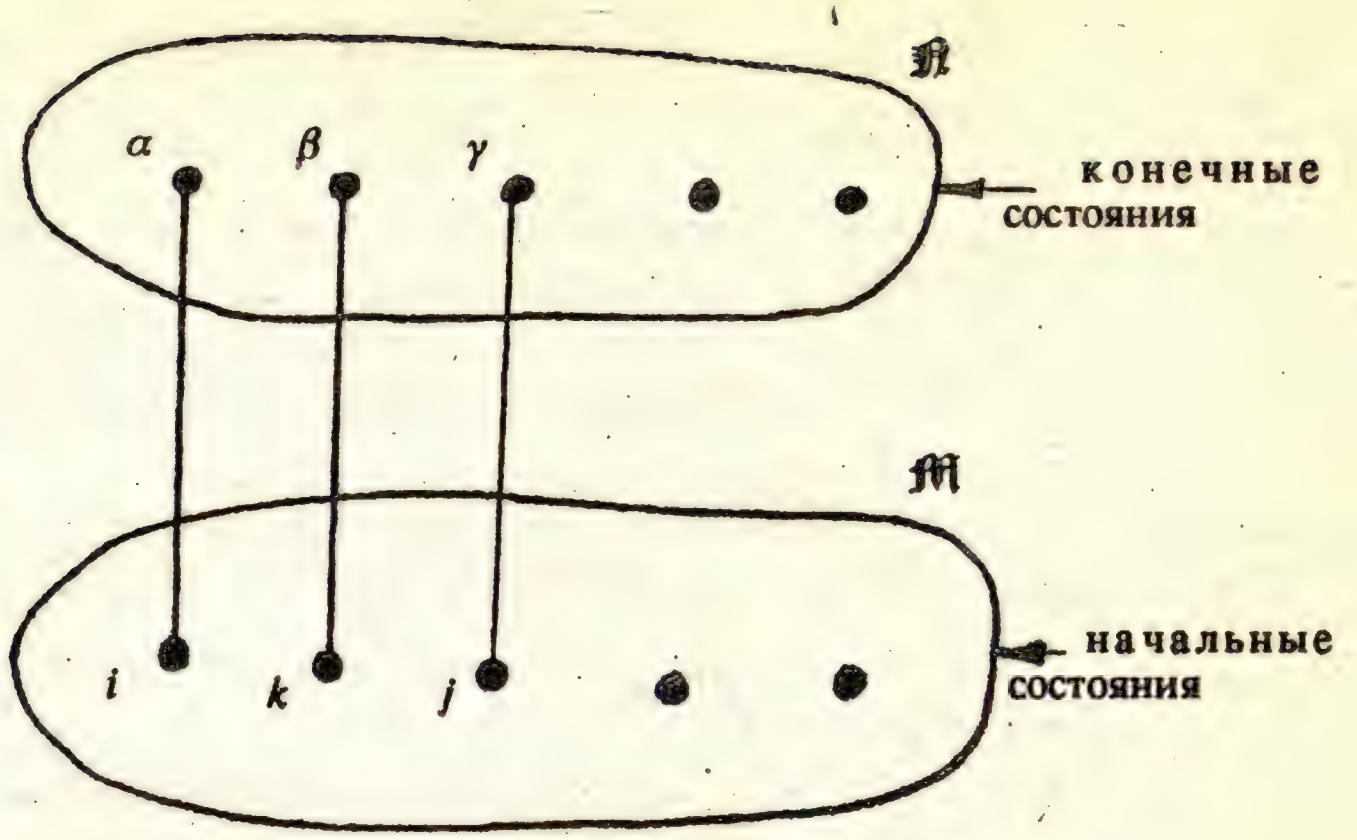


Рис. 11.

понятием, не требующим доопределений. Возникает несколько вопросов, принципиально важных для понимания всего дальнейшего. Первый из них: о каких частицах будет идти речь? Постулируем, что структурой ранга (3,3;б) описываются *свободные лептоны*. В этом разделе будут рассматриваться лептоны лишь одного (первого) поколения, т.е. электронные нейтрино и электроны (и их античастицы). Чем они отличаются друг от друга — будет обсуждено ниже.

Второй вопрос состоит в том, как математически выразить, что именно элемент α, например, является будущим (конечным) состоянием элемента i, а элемент β — будущим состоянием, допустим, элемента k? Другими словами, нужны некие условия связи, указывающие на нахождение элементов множеств в парах. Постулируем, что таким *условием связи является комплексная сопряженность параметров элементов*, т.е. α — будущее состояние элемента i, β — будущее k, γ — будущее j, если

$$\alpha^s = (i^s)^*;\ \beta^s = (k^s)^*;\ \gamma^s = (j^s)^*,\ldots \qquad (2.4.7)$$

где $s = 1, 2$. Это условие соответствует известным квантовомеханическим соотношениям между волновыми функциями частиц в начальном и конечном состояниях.

5. Для того, чтобы условия связи (2.4.7) сохранялись при допустимых преобразованиях (2.4.4), необходимо связать между собой параметры преобразований, т.е. в дальнейшем будем полагать

$$A^{\ s}_{.r} = (\tilde{A}^{\ s}_{.r})^*. \qquad (2.4.8)$$

Тогда условия инвариантности парных отношений (2.4.5) выделяют унитарную группу преобразований $U(2)$

$$A^1_{.1}\overset{*}{A}{}^1_{.1} + A^2_{.1}\overset{*}{A}{}^2_{.1} = 1; \quad A^1_{.2}\overset{*}{A}{}^1_{.2} + A^2_{.2}\overset{*}{A}{}^2_{.2} = 1;$$
$$A^1_{.1}\overset{*}{A}{}^1_{.2} + A^2_{.1}\overset{*}{A}{}^2_{.2} = 0. \tag{2.4.9}$$

Условие инвариантности фундаментального 2×2–отношения (2.4.6) теперь представляет собой одно комплексное соотношение на 8 вещественных параметров

$$A^1_{.1}A^2_{.2} - A^1_{.1}A^2_{.2} = 1, \tag{2.4.10}$$

т.е. выделяет 6–параметрическую группу преобразований $SL(2,C)$. И, наконец, одновременное выполнение условий (2.4.9) и (2.4.10) выделяет унимодулярную унитарную группу преобразований $SU(2)$, характеризуемую тремя независимыми вещественными параметрами. Известно, что группа преобразований $SL(2,C)$. соответствует группе Лоренца, а группа $SU(2)$ — группе пространственных вращений в пространстве–времени Минковского.

6. Рассмотрим фундаментальное 2×2–отношение (2.4.3) для четверки попарно связанных условиями (2.4.7) элементов. Очевидно, что в этом случае парные отношения $a_{i\alpha}$ и $a_{k\beta}$ являются вещественными, тогда как парные отношения $a_{i\beta}$ и $a_{k\alpha}$ комплексно сопряжены. Представим их через четыре вещественных числа b_μ в виде

$$a_{i\alpha} = b_0 + b_3; \quad a_{i\beta} = b_1 - ib_2;$$
$$a_{k\alpha} = b_1 + ib_2; \quad a_{k\beta} = b_0 - b_3, \tag{2.4.11}$$

тогда фундаментальное 2×2–отношение (2.4.3)

$$\begin{bmatrix} ik \\ \alpha\beta \end{bmatrix} = a_{i\alpha}a_{k\beta} - a_{i\beta}a_{k\alpha} = b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 \tag{2.4.12}$$

представляет собой 4–мерную квадратичную форму с сигнатурой (+ - - -), имеющую размерность и сигнатуру классического пространства–времени Минковского. При преобразованиях (2.4.4) с условием (2.4.10) эта форма остается инвариантной. Этот результат позволяет положить комплексифицированную бинарную структуру ранга (3,3;б) в фундамент теории классического пространства–времени и утверждать, что *размерность и сигнатура классического*

пространства–времени обусловлены бинарной структурой ранга (3,3;б).

Однако следует заметить, что для реализации объявленной выше программы еще предстоит пройти довольно длительный путь от данного утверждения до получения модели классического пространства–времени.

§ 2.5. Спиноры, биспиноры и прообраз уравнения Дирака

1. Только что изложенные сведения о свойствах бинарной структуры ранга (3,3;б) заставляют вспомнить теорию спиноров в 4–мерном пространстве–времени, которыми описываются известные виды элементарных частиц: лептоны и барионы. Напомним, что к понятию спиноров можно прийти многими способами. Можно исходить от алгебр Клиффорда, можно "извлекать квадратный корень" из 4–мерных векторов, а можно просто постулировать спиноры как элементы векторного (комплексного) пространства двух измерений, в котором определена антисимметричная квадратичная метрика. Очевидно, что спиноры как математические объекты являются более элементарными, нежели используемые в классической физике векторы и тензоры. Неудивительно, что именно ими описываются элементарные частицы.

Теорию бинарной структуры ранга (3,3;б) можно понимать как еще один способ введения 2–компонентных спиноров. Действительно, элементы структуры описываются двумя комплексными параметрами. Для параметров определены преобразования (2.4.4), которые при условии (2.4.7) совпадают со спинорными, а каждый из определителей слева в (2.4.3)

$$\begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} = i^1 k^2 - i^2 k^1 \equiv \varepsilon_{sr} i^s k^r = (\vec{i}, \vec{k}) = Inv \qquad (2.5.1)$$

можно понимать как спинорную антисимметричную метрику. Можно провести детальное сопоставление всех понятий и составных частей этих двух теорий, что не удивительно ввиду указанной ранее связи теорий структур и линейных пространств.

Однако разные исходные постулаты в формулировках структур и теории спиноров приводят к различию ролей отдельных понятий в соответствующих теориях. Так, в теории спиноров естественно вводятся спинтензоры — величины, преобразующиеся как произведения некоторого числа спиноров и сопряженных спиноров:

$$b^{sr\ldots\dot{i}\dot{p}}{}_{\ldots}$$

где $s, r, \dot{i}, \dot{p}, = 1,2$. Ранг спинтензора равен числу индексов и может быть любым. Известно, что для физических приложений наиболее важными являются смешанные спинтензоры второго ранга b^{sr} *). Оказывается, если спинтензоры второго ранга образовать из параметров двух пар элементов структуры ранга (3,3;б) в виде

$$b^{sr} = i^s \alpha^r + k^s \beta^r, \tag{2.5.2}$$

то спинтензорный инвариант $b_{sr} \cdot b^{sr}$ с точностью до коэффициента 1/2 совпадет с фундаментальным 2×2–отношением (2.4.3)

$$\frac{1}{2} b_{sr} \cdot b^{sr} = b^{1\dot{1}} b^{2\dot{2}} - b^{1\dot{2}} b^{2\dot{1}} = \begin{bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}. \tag{2.5.3}$$

Здесь везде индексы с точкой соответствуют параметрам элементов из множества N. Таким образом, именно спинтензоры второго ранга оказываются тесно связанными с ключевым понятием в теории структур — фундаментальным 2×2–отношением.

2. Особый интерес представляет случай, когда элементы i, α и k, β попарно соответствуют друг другу, т.е. находятся в парах согласно (2.4.7). В этом случае матрицу из элементов спинтензора b^{sr} можно представить в виде

$$\left\{b^{sr}\right\} = \begin{Bmatrix} b^{1\dot{1}} & b^{1\dot{2}} \\ b^{2\dot{1}} & b^{2\dot{2}} \end{Bmatrix} = I_2 p_0 + \sigma^i p_i, \tag{2.5.4}$$

где I_2 — единичная 2×2–матрица, $\sigma^i \equiv \sigma(i)$ — три матрицы Паули

$$\sigma(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma(2) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.5.5}$$

---

*)

Широко известна книга Ю.Б.Румера [40] по теории спиноров. Как представляется авторам, появление второй книги Ю.Б.Румера и А.И.Фета [13] на эту тему в значительной мере связано с намерением отобразить выделенную роль в физике спинтензоров 2–го ранга.

а коэффициенты p_0, $p_i = (p_1, p_2, p_3)$ образуют компоненты 4–мерного вектора. Легко видеть, что спинтензорный инвариант тогда представляется в виде

$$\frac{1}{2} b_{sr} b^{sr} = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \tag{2.5.6}$$

где $g^{\mu\nu}$ — метрический тензор 4–мерного псевдоевклидова пространства.

Легко обратно выразить компоненты вектора p_μ через компоненты спинтензора b^{sr} и далее, используя (2.5.2), записать p_μ через параметры элементов структуры ранга (3,3;б) [8]. В общем случае квадрат вектора p_μ, сопоставленного согласно (2.5.2) и (2.5.4) двум парам элементов, отличен от нуля. Заметим, что спинтензор b^{sr} можно образовать и из одной пары элементов, например,

$$b^{sr} = i^s \alpha^r \tag{2.5.7}$$

однако легко убедиться, что в этом случае вектор $p_\mu(i,\alpha)$ является изотропным (т.е. его квадрат тождественно равен нулю).

3. Для двух пар сопряженных элементов i, α и k, β можно развить специальный математический аппарат, соответствующий известной теории биспиноров, которыми описываюся массивные лептоны. Для этого нужно образовать 4–компонентный столбец и строку следующим образом

$$\psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta^2 \\ -\beta^1 \end{pmatrix}; \quad \psi^+ = (\alpha^1, \alpha^2, k_1, k_2), \tag{2.5.8}$$

где ковариантные компоненты спиноров определены с помощью антисимметричного метрического тензора $k_s = \varepsilon_{sr} k^r$. Вводя 4–рядные матрицы Дирака по формулам

$$\gamma^0 = -\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(i) \\ -\sigma(i) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5.9}$$

легко убедиться, что имеют место соотношения

$$2p^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi; \quad \bar{\psi}\psi = -\begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}, \qquad (2.5.10)$$

где $\psi \equiv \psi^{+}\gamma^{0}$. Все это общеизвестные формулы из релятивистской электродинамики.

В рамках структуры ранга (3,3;б) еще рано говорить о понятиях электрического заряда или электрического тока, поэтому физическая интерпретация в этих терминах пока преждевременна. Пока разумно утверждать, что полученные понятия следует отнести к отношениям в импульсном 4–мерном пространстве. Заметим, что с точки зрения математики безразлично, к чему применяется теория спиноров или биспиноров: к координатному или к импульсному пространствам. В данном же подходе, претендующем на обоснование фундамента физической картины мира, это не так. Интерпретация должна быть конкретной. Пока у нас нет возможности говорить о трансляциях и вообще о координатном пространстве–времени. К его введению мы сможем подойти значительно позже.

Еще раз подчеркнем, что наша цель здесь состоит не в детальном изложении теории, а в пояснении конструкции физической теории (бинарной геометрофизики), получающейся на базе бинарных структур. Главная задача заключается в том, чтобы продемонстрировать, как используемые в современной теоретической физике понятия можно ввести, исходя из теории бинарных структур, поэтому лишь назовем основные черты и элементы развиваемой теории.

Преобразования (2.4.4) параметров элементов (спиноров) сопоставляются с 6–параметрическими преобразованиями Лоренца. Легко показать, что выражения типа $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}...\psi$ преобразуются как компоненты тензоров соответствующего ранга. Их также можно выразить через параметры элементов структуры [8]. Из преобразований Лоренца можно выделить 3–параметрическую совокупность преобразований — бустов, затрагивающих временно–подобные компоненты тензоров.

4. Две пары элементов могут описывать как две безмассовые частицы (нейтрино), так и одну массивную частицу (электрон). Очевидно, что должны быть какие–то математические условия на параметры двух элементов, объединенных в одну частицу. Чтобы их сформулировать формально, введем понятие *системы отсчета.* Пусть в согласии с тем, как это делается в методе хронометрических инвариантов в теории относительности, пространственные повороты не меняют систему отсчета, тогда как преобразования бустов описывают переходы между различными системами отсчета. Назовем *собственной системой отсчета* частицы такую, в которой три прост-

ранственно-подобные компоненты вектора p_i (см. (2.5.10)) равны нулю. Временно-подобная компонента p_0 в общем случае отлична от нуля. Естественно ожидать, что для каждой частицы (античастицы) должна существовать собственная система отсчета. Анализ показывает, что требование наличия собственной системы отсчета приводит к двум типам характерных условий на параметры двух элементов, описывающих состояние частиц. Естественно один тип сопоставить с частицей (электроном), а второй — с античастицей (позитроном). Для частицы эти условия имеют вид

$$i_c^1 = (k_c^2)^*;\ \ i_c^2 = -(k_c^1)^* \to \alpha_c^1 = (\beta_c^2)^*;\ \ \alpha_c^2 = -(\beta_c^1)^*, \tag{2.5.11}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение, а индекс "c" снизу — что параметры взяты в собственной системе отсчета. Для античастицы условия имеют вид

$$i_c^1 = -(k_c^2)^*;\ \ i_c^2 = (k_c^1)^* \to \alpha_c^1 = -(\beta_c^2)^*;\ \ \alpha_c^2 = (\beta_c^1)^*. \tag{2.5.12}$$

В произвольной системе отсчета компоненты биспинора выражаются через компоненты в собственной системе отсчета следующим образом

$$\psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = S\psi_c = \begin{pmatrix} b_0+b_3 & b_1-ib_2 & 0 & 0 \\ b_1+ib_2 & b_0-b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3-b_3 & -b_1-ib_2 \\ 0 & 0 & -b_1+ib_2 & b_0+b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_c^1 \\ i_c^2 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{2c} \end{pmatrix}, \tag{2.5.13}$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 — четыре параметра, характеризующие преобразование буста и связанные соотношением

$$b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 = 1. \tag{2.5.14}$$

В частности, для псевдоповорота в плоскости (0,1) эти параметры следует выбрать в виде

$$b_0 = ch\frac{\Theta_1}{2};\ \ b_1 = sh\frac{\Theta_1}{2};\ \ b_2 = b_3 = 0, \tag{2.5.15}$$

где $th\Theta_1 + V^1/c$ можно понимать как скорость движения второй системы отсчета относительно первой вдоль первой оси. При пространственных поворотах, как известно, компоненты i^s и β_s преобразуются одинаковым образом.

5. Изложенного здесь материала вполне достаточно, чтобы ввести *прообраз уравнения Дирака* в импульсном пространстве. Напомним, что в рамках стандартной электродинамики уравнения Дирака (в координатном пространстве–времени) обычно вводятся после задания

дифференциального уравнения Клейна–Фока путем "извлечения из него квадратного корня". В нашем же подходе пока нет ни координатного пространства–времени, ни волновых уравнений, но тем не менее уже можно ввести прообраз уравнения Дирака.

Оказывается, прообразом уравнения Дирака в импульсном пространстве является соотношение, связывающее верхнюю i^s и нижнюю β_s пары компонент биспинора для того специального случая, когда пары элементов i, α и k, β образуют одну частицу (античастицу). Действительно, свяжем названные компоненты в произвольной системе отсчета соотношением

$$\beta_r^{\cdot} = K_{rs}^{\cdot} i^s \to \begin{pmatrix} \beta_i^{\cdot} \\ \beta_2^{\cdot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11}^{\cdot} & K_{12}^{\cdot} \\ K_{21}^{\cdot} & K_{22}^{\cdot} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} \qquad (2.5.16)$$

и найдем четыре комплексные компоненты матрицы $K_{rs}^{\cdot}$. Подставляя в (2.5.16) параметры i^s и β_r через их значения в собственной системе отсчета согласно (2.5.13), приравняем друг другу слева и справа коэффициенты в двух уравнениях отдельно при i_c^s и $\beta_{rc}^{\cdot}$ В итоге получатся четыре уравнения. Их решения имеют вид

$$K_{rs}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 2b_0^2 - 1 - 2b_0 b_3 & -2b_0(b_1 - ib_2) \\ -2b_0(b_1 + ib_2) & 2b_0^2 - 1 - 2b_0 b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= I_2 u^0 - \sigma(i) u^i \equiv \sigma_{(-)_\mu} u^\mu \qquad (2.5.17)$$

С помощью данной в (2.5.15) интерпретации легко убедиться, что u^μ представляет собой компоненты 4–скорости.

Вводя обозначения для двух пар параметров в 4–столбце $\psi_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ и $\psi_1 = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix}$ и умножая (2.5.16) на некий коэффициент $m_0 c$, имеем

$$\psi_2 m_0 c = \sigma_{\mu(-)} p^\mu \psi_1 \to \sigma_{(-)}^\mu p_\mu \psi_1 - m_0 c \psi_2 = 0. \qquad (2.5.18)$$

Обратное к (2.5.16) соотношение

$$i^s = K^{sr} \beta_r^{\cdot} \qquad (2.5.19)$$

приводит к выражению

$$\sigma_{(+)} p_\mu \psi_2 - m_0 c \psi_1 = 0, \qquad (2.5.20)$$

где $\sigma^{\mu}_{(+)}$ — совокупности матриц $i_2, \sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$. Объединяя соотношения (2.5.18) и (2.5.20) в одно 4-компонентное выражение и вспоминая вид матриц Дирака (2.5.9), имеем

$$(\gamma^{\mu} p_{\mu} + m_0 c)\psi = 0, \qquad (2.5.21)$$

что совпадает со стандартным уравнением Дирака в импульсном пространстве.

§ 2.6. Структура ранга (2,2) и ее роль в физической картине мира

Принципиально важную роль в построении физической картины мира играет бинарная структура минимального ранга (2,2). На первый взгляд, казалось бы, что следует говорить о двух структурах — рангов (2,2;а) и (2,2;б). Однако для структуры ранга (2,2) эти разновидности можно понимать как две стороны одной медали. За этой двойственностью скрываются два аспекта физической теории: классический и квантовый. Продемонстрируем это.

1. Начнем со структуры ранга (2,2;а). Ее закон записывается в виде

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = a_{i\beta} + a_{k\alpha} - a_{k\beta} - a_{i\alpha} = 0, \qquad (2.6.1)$$

где парное отношение между элементами двух множеств имеет вид

$$a_{i\alpha} = i + \alpha, \qquad (2.6.2)$$

т.е. каждый элемент характеризуется всего одним параметром.

От аддитивной записи парного отношения можно перейти к мультипликативной, положив

$$i = \ln \tilde{i}; \quad \alpha = \ln \tilde{\alpha}, \qquad (2.6.3)$$

тогда

$$a_{i\alpha} = \ln (\tilde{i}\,\tilde{\alpha}) \equiv \ln U_{i\alpha}, \text{ где } U_{i\alpha} = \tilde{i}\,\tilde{\alpha}. \qquad (2.6.4)$$

Подставляя (2.6.4) в (2.6.1), находим

$$a_{i\beta} + a_{k\alpha} - a_{k\beta} - a_{i\alpha} = \ln \frac{U_{k\alpha}U_{i\beta}}{U_{k\beta}U_{i\alpha}} = 0,$$

т.е. $U_{i\alpha}U_{k\beta} = U_{i\beta}U_{k\alpha}$. Последнее соотношение можно понимать как закон структуры ранга (2,2;б)

$$\begin{vmatrix} U_{i\alpha} & U_{i\beta} \\ U_{k\alpha} & U_{k\beta} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.6.5)$$

с парными отношениями вида (2.6.4). Это доказывает эквивалентность двух форм структуры ранга (2,2).

Для структуры ранга (2,2;а) в общем случае отлично от нуля фундаментальное 2×2–отношение

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = (i-k)(\alpha-\beta). \qquad (2.6.6)$$

Очевидно, что параметры элементов структуры ранга (2,2;а) определены с точностью до группы трансляций (глобальных)

$$i \to i + b; \quad \alpha \to \alpha - b, \qquad (2.6.7)$$

оставляющих инвариантными как парные отношения (2.6.2), так и фундаментальное 2×2–отношение (2.6.6).

2. Дадим физическую интерпретацию понятиям структуры ранга (2,2;а) в рамках развиваемой здесь бинарной геометрофизики [9]. Для этого опять введем понятие нахождения разноименных элементов двух множеств "*в паре*". Забегая вперед, поясним, что нахождение в паре означает определение связанного состояния или объединение двух разнородных эле

ментов в одну частицу. (Это понятие пока никак не связано с данным в рамках структуры ранга (3,3;б).) Ограничимся случаем *вещественных* парных отношений и постулируем, что элементы i и α, k и β, j и γ и т.д. находятся в паре, если

$$i = -\alpha; \quad k = -\beta; \quad j = -\gamma, \ldots . \qquad (2.6.8)$$

Для двух пар связанных элементов $a_{i\alpha} = a_{k\beta} = 0$ и закон (2.6.1) означает

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{i\beta} \\ 1 & a_{k\alpha} & 0 \end{vmatrix} = a_{k\alpha} + a_{i\beta} = 0 \to a_{i\beta} = -a_{k\alpha} \equiv S_{ik}, \qquad (2.6.9)$$

т.е. можно ввести антисимметричное унарное отношение между связанными парами, обозначая его индексами элементов только одного сорта (пусть это будут латинские индексы).

Далее возьмем пару связанных элементов i, α и два элемента β и j, принадлежащих двум другим связанным парам: k, β и j, γ. Для такой четверки элементов закон (2.6.1) означает

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{i\beta} \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = S_{ik} - S_{jk} - S_{ji} = 0, \qquad (2.6.10)$$

где бинарные парные отношения $a_{i\beta}, a_{j\beta}$ $a_{j\alpha}$ заменены на унарные S_{ik}, S_{jk} и S_{ji} согласно (2.6.9). Но это соотношение представляет собой не что иное, как свойство расстояний между тремя точками i, k, j, находящимися на одной ориентированной линии (см. рис. 12):

$$S_{ij} = S_{ik} + S_{kj}.$$

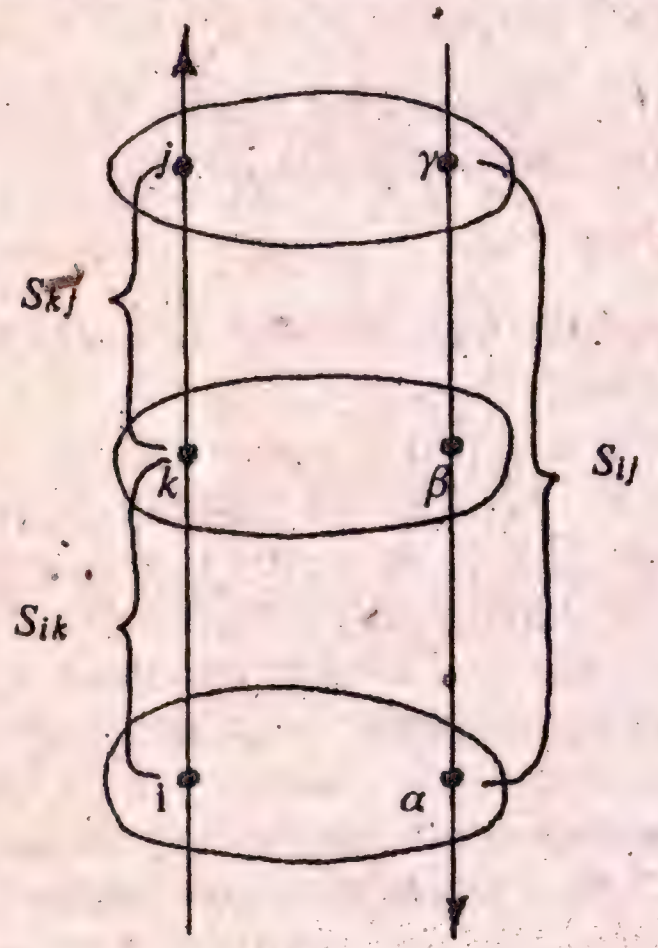


Рис. 12.

Заметим, что описанный здесь переход от бинарных отношений к унарным соответствует переходу от бинарной структуры ранга (2,2;а) (с условиями нахождения элементов в парах) к унарной симплектической структуре ранга 3, описанной в первой части книги.

Физическая интерпретация парных отношений структуры ранга (2,2;а) опирается на установленное здесь свойство аддитивности (2.6.10) и на ряде других соображений, о которых будет идти речь ниже. Нам известно, что свойством аддитивности в классической физике обладает действие. Постулируем, что *парные отношения* $a_{i\beta} = -a_{k\alpha}$ *структуры ранга* (2,2;а) *соответствуют классическому действию* S_{ik} *между двумя состояниями* (точками, событиями) *на некой мировой линии одной и той же частицы.*

Проанализируем физический и геометрический смысл фундаментальных 2×2–отношений (2.6.6). Если четверка элементов образует две связанные пары i,α и k,β, то фундаментальное 2×2–отношение

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & 0 \end{vmatrix} = -a_{k\alpha}a_{i\beta} = S_{ik}^2 \qquad (2.6.11)$$

с точностью до коэффициента определяет квадрат интервала между двумя точками–событиями на мировой линии частицы.

Если два элемента i, α из четверки образуют связанную пару, а два других β и j — нет (как в случае формулы (2.6.10)), то имеем

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{i\beta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} \end{vmatrix} = -a_{j\alpha}a_{i\beta} = S_{ik}S_{ij} = S_{AB}^2. \qquad (2.6.12)$$

Эту формулу можно проинтерпретировать в духе так называемой *хроногеометрии*, применяемой в теории относительности для описания радиолокационной методики задания расстояния и времени между точкой–событием A на мировой линии наблюдателя и произвольной другой точкой B, лежащей за пределами мировой линии (см. рис. 13). Это делается с помощью часов наблюдателя, фиксирующего время посылки светового сигнала t_{ik}, попадающего в B, и время t_{ik} приема отраженного от B сигнала.

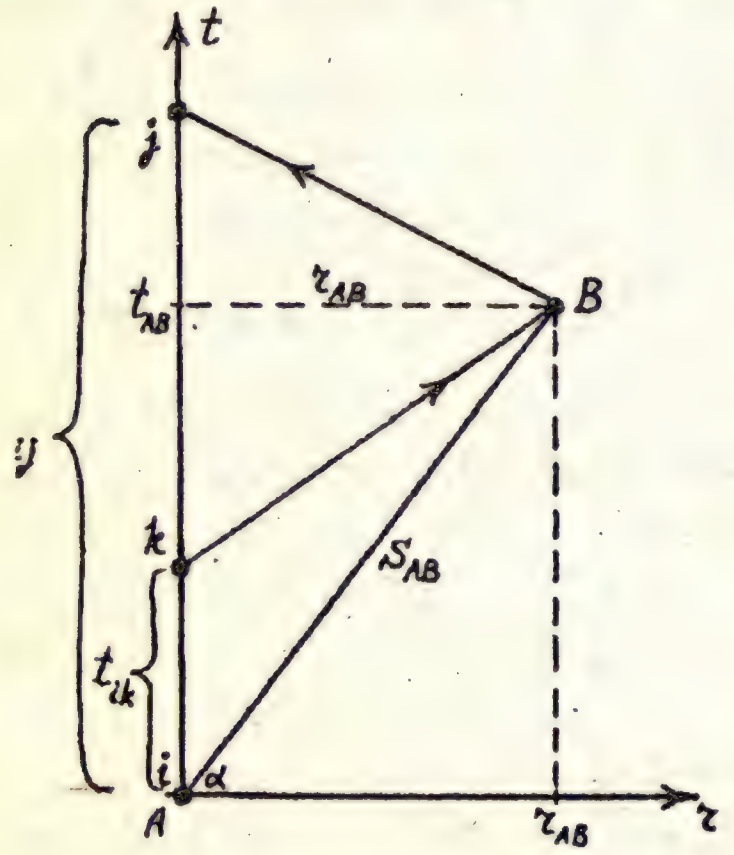


Рис.13.

Поскольку классическое действие пропорционально собственному времени на мировой линии наблюдателя, можно перейти от действия к разности времен (при скорости света $c = 1$)

$$S_{ik} \to t_{ik};\ \ S_{ij} \to t_{ij}\,.$$

Тогда расстояние r_{AB} и разность времени t_{AB} между двумя событиями A (сопоставленным со связанной парой i, α) и B соответственно определяются выражениями

$$r_{AB} = \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ik}); \quad t_{AB} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ik}). \qquad (2.6.13)$$

Следовательно, формулу (2.6.12) можно понимать как квадрат интервала между двумя событиями A и B

$$s_{ik}^2 = t_{ik}t_{ij} = t_{AB}^2 - r_{AB}^2 . \qquad (2.6.14)$$

Таким образом, *структура ранга* (2,2;а) *позволяет описывать отношения, соответствующие 2-мерному псевдоевклидову пространству*(2-мерному пространству-времени). Заметим, что размерность два означает минимальную размерность, где применимы такие рассуждения, однако размерность пространства может быть и большей. Об этом свидетельствует применимость данных рассуждений в рамках 4-мерной теории относительности. Ясно, что хроногеометрия (на базе одного наблюдателя) не позволяет что-либо сказать о наличии более высоких размерностей. Известно [4, 42], что при аксиоматическом построении теории относительности к постулатам хроногеометрии приходится добавлять некие понятия и аксиомы, позволяющие сформировать 4-мерное пространство-время.

3. Мультипликативное представление структуры ранга (2,2), т.е. структура ранга (2,2;б) *соответствует квантовомеханическим закономерностям*. Чтобы показать это, заметим, что переход (2.6.4) от парных отношений $a_{i\alpha}$ к парным отношениям $U_{i\alpha}$ структуры ранга (2,2;б) допускает введение произвольного вещественного или комплексного универсального множителя k, т.е. можно записать

$$ka_{k\alpha} = \ln U_{k\alpha} \to U_{k\alpha} = e^{ka_{k\alpha}} = e^{-kS_{ik}}. \qquad (2.6.15)$$

Зная, как в квантовой теории осуществляется переход от волновой функции частицы к классическим понятиям, следует постулировать конкретное значение постоянной k:

$$k = \frac{i}{\hbar} \to U_{k\alpha} = e^{-\frac{i}{\hbar}S_{ik}} \to K_{ik} = e^{\frac{i}{\hbar}S_{ik}} . \qquad (2.6.16)$$

где $\hbar$ — постоянная (Планка) размерности действия.

Напомним, что в развиваемой здесь бинарной геометрофизике пока нет классического пространства-времени, как нет и понятия классического действия в строгом его понимании. Пока речь идет скорее о прообразах общеизвестных понятий. Их еще нужно будет построить. Поэтому в этом параграфе говорится лишь о *соответствии* понятий, возникающих в теории структур, имеющимся в теоретической физике. Указанное соответствие нацеливает нас на

выбор одной из известных формулировок квантовой механики, на которую мы должны выйти для реализ ции сформулированной здесь программы. Из трех имеющихся ныне формулировок — шредингеровской, гейзенберговской и фейнмановской — мы должны выбрать фейнмановскую [43], поскольку именно в ней во главу угла ставится понятие действия.

Фейнмановская формулировка квантовой механики называется еще методом континуального интегрирования или методом суммирования по историям. Она предполагает наличие следующих понятий: состояния частицы или системы (начальные, промежуточные, конечные), пути (истории) перехода между состояниями и амплитуд перехода (элементарной и суммарной). Далее на базе этих понятий в фейнмановской теории формулируются два основных принципа. Первый принцип состоит в том, что *амплитуда перехода* K_{ij} из одного состояния i в другое j является комплексной величиной и определяется суммой элементарных амплитуд $K(\Gamma_{ij})$, соответствующих отдельным *путям перехода* Γ_{ij} между этими состояниями: $K_{ij} = \sum_{\Gamma} K(\Gamma_{ij})$. Второй принцип конкретизирует величину элементарной амплитуды $K(\Gamma_{ij})$: "Все траектории (возможные пути —Ю.С.В.) вносят вклад, одинаковый по абсолютной величине; фаза каждого вклада представляет собой (выражение в единицах $\hbar$) классическое действие" [43, с. 175].

Какие из названных понятий содержатся в теории структуры ранга (2,2;б)? (Связанную пару из двух элементов i , α можно понимать как состояние частицы (системы).) Линейно упорядоченную совокупность состояний между избранными i и j будем трактовать как траекторию (путь перехода) между состояниями. Тогда *парное отношение* $U_{i\gamma} \to K_{ij}$ *структуры ранга (2,2;б) следует понимать как элементарную амплитуду перехода частицы между двумя состояниями:* i *(т.е.* i,α*)* *и* j *(т.е.* j,γ*).* Свойству аддитивности действия (2.6.10) соответствует известное в фейнмановской теории свойство мультипликативности для амплитуд перехода

$$e^{\frac{i}{\hbar}S_{ij}} = e^{\frac{i}{\hbar}(S_{ik} + S_{ij})} \to K_{ij} = K_{ik}K_{kj}\,. \qquad (2.6.17)$$

Однако в теории структуры ранга (2,2;б) отсутствуют причины (основания) для введения *множественности путей* перехода между двумя состояниями, а следовательно отсутствуют и понятия весовых вкладов каждого из путей и нет понятия *суммарной амплитуды*. Это

должно вводиться с помощью дополнительных постулатов. О них пойдет речь в следующем параграфе.

§ 2.7. Композиция структур рангов (2,2) и (3,3;б) и прообраз классического пространства–времени

В том виде, как это было изложено выше, бинарных структур рангов (2,2) и (3,3;б) в отдельности недостаточно для построения модели классического пространства–времени. В рамках структуры ранга (2,2) удается ввести 2–мерное псевдоевклидово пространство с трансляцией и прообраз действия, однако невозможно обосновать 4–мерие. В рамках структуры ранга (3,3;б), наоборот, удается обосновать 4–мерное псевдоевклидово многообразие, в котором определена группа Лоренца, но пока в нем не было группы трансляции. Это многообразие следует трактовать импульсным пространством. Покажем, что можно объединить достоинства этих двух структур и прийти к прообразу классического пространства–времени, выделив структуру ранга (2,2) из структуры ранга (3,3;б). В итоге получается своеобразное произведение этих двух бинарных структур, названное нами *композицией структур*.

Поясним это утверждение. Для этого обратим внимание на то, что параметры пар одноименных элементов структуры ранга (3,3;б), описывающих состояние одной частицы, определены неоднозначно. Наложенные на них условия (2.5.11) и (2.5.1) позволяют их умножать на комплексные множители, по модулю равные единице:

$$i^s \to i^s e^{\frac{i}{\hbar} S_i};\quad k^s \to k^s e^{-\frac{i}{\hbar} S_i};$$
$$\beta^s \to \beta^s e^{\frac{i}{\hbar} S_\beta};\quad \alpha^s \to \alpha^s e^{-\frac{i}{\hbar} S_\beta}; \qquad (2.7.1)$$

где $S_i, S_k = -S_i, S_\beta, S_\alpha = -S_\beta$ — вещественные числа, сопоставляемые элементам. Для этих чисел специально использованы обозначения из § 2.6, чтобы подчеркнуть тем самым, что эти числа следует понимать как параметры бинарной структуры ранга (2,2;а). Очевидно, если элементам сопоставить по одному параметру S, то они будут удовлетворять закону (2.6.1) структуры ранга (2,2;а) (или удовлетворять закону (2.6.5), если под числами понимать $\exp\left\{\frac{i}{\hbar} S\right\}$). В этом смысле следует понимать выделение структуры ранга (2,2) из структуры ранга (3,3;б).

Теперь четверку элементов, описывающих "начальные" и "конечные" состояния одной и той же частицы, следует трактовать с позиции двух структур рангов (2,2) и (3,3;б). Элементы и множества

структуры ранга (2,2) будем помечать штрихом, а структуры ранга (3,3;б) — не будем. Выражения (2.7.1) заставляют отождествить элементы i и k множества $\mathfrak{M}$ структуры ранга (3,3;б) с разноименными элементами i' и α' структуры ранга (2,2). Аналогично отождествляются элементы α и β с элементами β' и k', т. е. имеем

$$i \leftrightarrow i';\ k \leftrightarrow \alpha';\ \beta \leftrightarrow k';\ \alpha \leftrightarrow \beta', \qquad (2.7.2)$$

что проиллюстрировано на рис. 14. Это означает, что множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ структуры ранга (3,3;б) распадаются на пары подмножеств по принадлежности элементов двум множествам структуры ранга (2,2). То же самое можно сказать про множества $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{N}'$ структуры ранга (2,2).

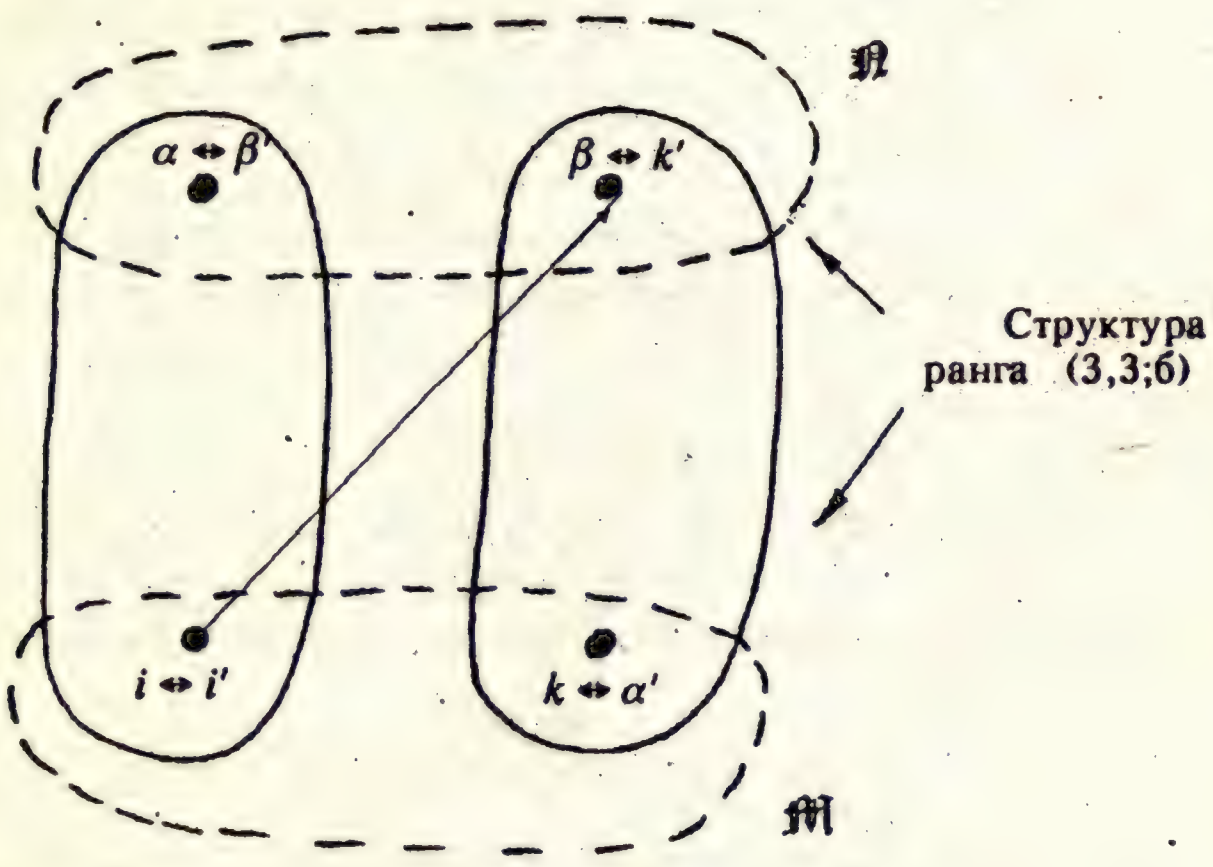


Рис. 14

Элементы структуры ранга (2,2), т.е. параметры S_i и S_β в (2.7.1), позволяют осуществить своеобразную развертку, т.е. тиражирование дискретных переходов, описываемых структурой ранга (3,3;б), вдоль линейно упорядоченного множества элементов структуры ранга (2,2), что показано на рис. 15.

При этом элементы структуры ранга (2,2) разделяются на чередующиеся четные и нечетные элементы.

Композицию двух структур можно качественно пояснить с помощью примера образования электронным лучем изображения на экране телевизора. Как известно, чтобы электронный луч обежал весь экран, необходимы два генератора разверток: по горизонтали и по вертикали. Аналогом таких генераторов являются две бинарные

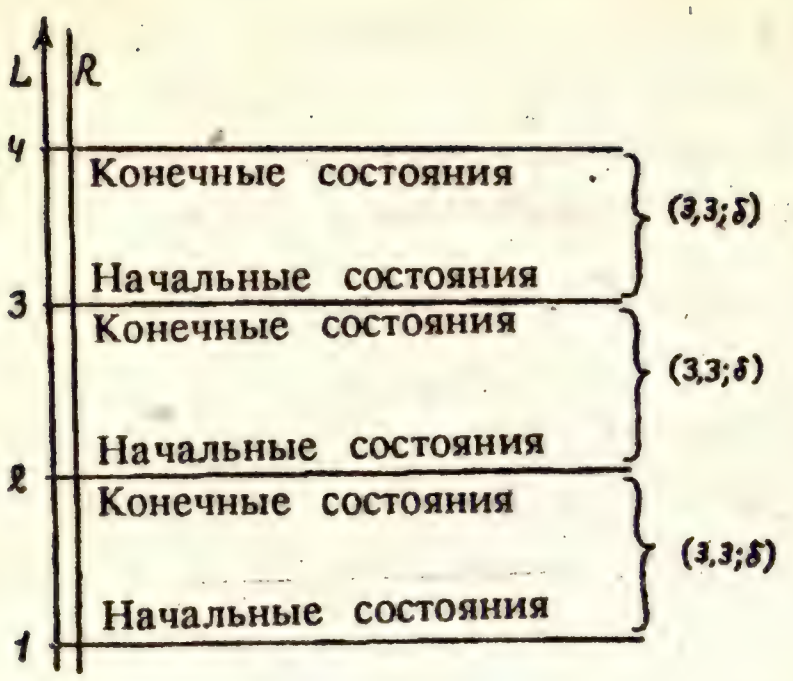


Рис. 15

структуры рангов (3,3;б) и (2,2). Структура ранга (2,2) ответственна за понятие эволюции, т.е. развитие во времени (см. рис. 12). Если время на рисунке изображать вертикальной осью, то структура ранга (2,2) должна соответствовать генератору развертки по вертикали. В рамках структуры ранга (3,3;б) вся эволюция состоит из двух моментов: начало и конец. Два множества этой структуры можно представить себе как две горизонтальные полосы, близко расположенные друг к другу. В зависимости от того, какие пары элементов описывают состояние частицы, будут получаться разные значения ее импульса. Роль структуры ранга (3,3;б) следует сопоставить с генератором развертки по горизонтали.

Проанализируем, какие следствия можно вывести из сопоставления параметров двух структур. Выделим две пары увязанных элементов $i \leftrightarrow i'$ и $\beta \leftrightarrow \beta'$ (см. связанные стрелкой пары на рис. 14). Парное отношение между ними по структуре ранга (2,2) можно охарактеризовать действием

$$a_{i'\beta'} = S_{i'k'} = k' - i', \qquad (2.7.3)$$

которое, в свою очередь, выражается в виде разности двух вещественных чисел. С другой стороны, параметры выделенной пары элементов структуры ранга (3,3;б) связаны между собой прообразом уравнения Дирака (2.5.16), т.е.

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{\cdot} \\ \beta_2^{\cdot} \end{pmatrix} = \frac{1}{m_0 c} \cdot \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} \qquad (2.7.4)$$

Параметры $\beta_s^{\cdot}$ получаются из параметров i^s с помощью компонент 4–вектора p_μ.

Представим парное отношение структуры ранга (2,2;а) (т.е. прообраз действия $S_{i'k'}$) как функцию компонент 4–вектора p_μ, присущего структуре ранга (3,3;б). Поскольку $S_{i'k'}$ является внешним объектом по отношению к структуре (3,3;б), то при допустимых в

ней преобразованиях Лоренца $S_{i'k'}$ должно оставаться инвариантным. Следовательно, в простейшем случае такая функция должна иметь вид

$$S_{i'k'} = k' - i' = p_\mu \Delta x^\mu, \tag{2.7.5}$$

где Δx^μ — некая четверка коэффициентов, которая для сохранения инвариантности $S_{i'k'}$ должна при преобразованиях Лоренца преобразовываться как 4–вектор

$$(p_\mu)' = L_\mu^{\ \alpha} \cdot p_\alpha \ \rightarrow \ (\Delta x^\mu)' = L^\mu_\beta \Delta x^\beta \tag{2.7.6}$$

где $L_{\mu\alpha} L^\mu_\beta = g_{\alpha\beta}$, L^μ_β — коэффициенты преобразования Лоренца.

Согласно (2.7.3) $S_{i'k'}$ представляется в виде разности двух величин, каждую из которых также будем считать скаляром. Следовательно, коэффициенты Δx^μ в (2.7.5) также следует представить в виде разности компонент двух векторов, сопоставляемых отдельно с парами i', α' и k', β',

$$k \rightarrow x^\mu(k', \beta'); \tag{2.7.7}$$

$$i \rightarrow x^\mu(i', \alpha') \rightarrow \Delta x^\mu = x^\mu(k', \beta') - x^\mu(i', \alpha').$$

В итоге приходим к представлению $S_{i'k'}$ в виде

$$S_{i'k'} = p_\mu \left[x^\mu(k', \beta') - x^\mu(i', \alpha') \right]. \tag{2.7.8}$$

Это соотношение соответствует стандартному выражению действия через координаты и импульсы в релятивистской механике.

Введенные таким образом компоненты x^μ следует трактовать как координаты прообраза классического 4–мерного пространства–времени. Таким образом, в данном подходе *координатное пространство–время имеет не первичный характер, как это принято понимать в стандартной физике, а является производным (вторичным) понятием, возникающим в результате композиции двух бинарных структур рангов* (2,2) и (3,3;б).

§ 2.8. Динамический принцип для фермионов и квантовая механика

После того как определена композиция двух структур и введен прообраз классического пространства–времени, можно перейти от

прообраза уравнения Дирака (2.5.21) к известному уравнению Дирака в координатном пространстве–времени. А это уже означает построение фундамента квантовой теории, причем сразу в релятивистском виде [44]. Продемонстрируем, как это делается.

1. Прежде всего *обобщим первую часть прообраза уравнения Дирака* (2.2.18) *на случай композиции двух структур.* Это означает, что теперь мы должны рассматривать элементы i и β в (2.5.18) как элементы, одновременно принадлежащие двум структурам рангов (2,2;б) и (3,3;б). Напомним, что для описания квантовой теории нужно использовать структуру ранга (2,2) именно в варианте (2,2;б). Следовательно, элементы $i \leftrightarrow i'$ и $\beta \leftrightarrow k'$ будут описываться 2–компонентными величинами из структуры ранга (3,3;б), умноженными на соответствующий параметр структуры ранга (2,2;б), т.е.

$$\begin{aligned}(\beta \leftrightarrow \beta') \;&\rightarrow\; \psi_2 = \begin{pmatrix}\beta_1^{\cdot}\\ \beta_2^{\cdot}\end{pmatrix} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta'} = \begin{pmatrix}\beta_1^{\cdot}\\ \beta_2^{\cdot}\end{pmatrix} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\cdot p_\mu x^\mu(k',\beta')}\\ (i \leftrightarrow i') \;&\rightarrow\; \psi_1 = \begin{pmatrix}i^1\\ i^2\end{pmatrix} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\alpha'} = \begin{pmatrix}i^1\\ i^2\end{pmatrix} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\cdot p_\mu x^\mu(i',\alpha')}\end{aligned} \tag{2.8.1}$$

где использованы формулы (2.7.5) и (2.7.7). После введения таких определений соотношение между обобщенными элементами $i \leftrightarrow i'$ и $\beta \leftrightarrow k'$, обобщающее (2.5.18), запишется в виде

$$\begin{aligned}\psi_2 = \frac{1}{m_0 c} \cdot \sigma^\mu_{(-)} p_\mu \cdot \\ \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \cdot p_\mu \left[x^\mu(k',\beta') - x^\mu(i',\alpha')\right]\right\}\psi_1.\end{aligned} \tag{2.8.2}$$

2. После осуществления композиции двух структур *следует изменить понимание второй половины прообраза уравнения Дирака* (2.5.20). Если в § 2.2 им описывался обратный переход от β к i, то теперь второй половиной будем описывать переход от обобщенного элемента $\beta \leftrightarrow k'$ к третьему обобщенному элементу $j \leftrightarrow j'$ (см. рис. 16).

Введем для третьего элемента двухкомпонентную величину ψ_3 аналогично (2.8.1)

$$(j \leftrightarrow j') \;\rightarrow\; \psi_3 = \begin{pmatrix}j^1\\ j^2\end{pmatrix} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}j'} = \begin{pmatrix}j^1\\ j^2\end{pmatrix} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\cdot p_{\mu(2)} x^\mu(j',\gamma')} \tag{2.8.3}$$

Тогда вторая половина прообраза уравнения Дирака (2.5.20) перейдет в следующее соотношение:

$$\psi_3 = \frac{1}{m_0 c} \cdot \sigma^{\mu}_{(+)} p_{\mu(2)} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \cdot p_{\mu(2)} \left[x^{\mu}(j', \gamma') - x^{\mu}(k', \beta') \right] \right\} \psi_2 . \qquad (2.8.4)$$

Эту процедуру можно продлить и далее, вводя четвертое состояние, пятое, ...

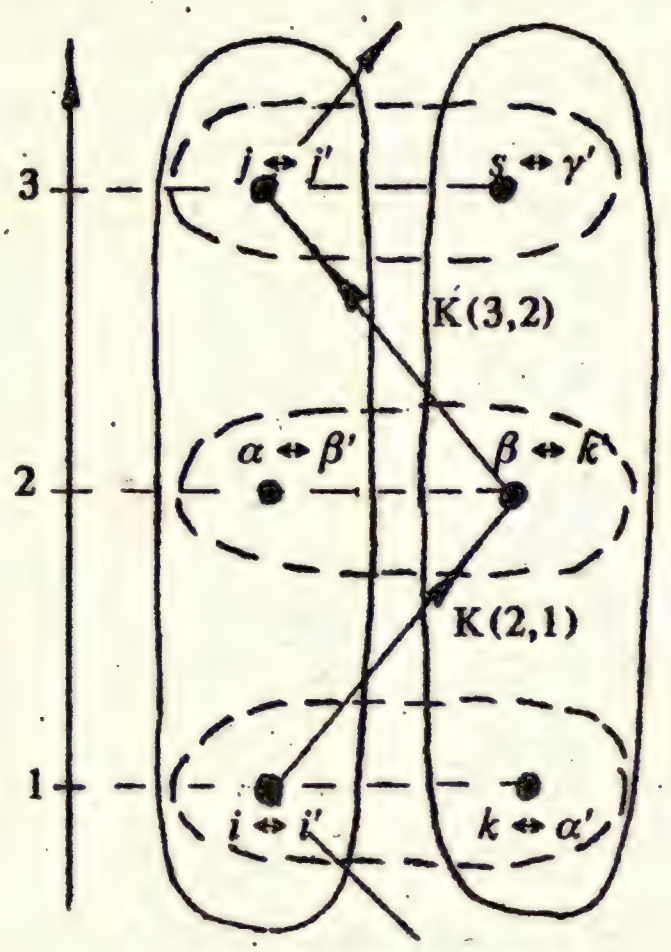


Рис. 16.

3. Пока здесь рассматривался лишь конкретный шаг структуры ранга (3,3;б) вдоль структуры ранга (2,2;б). Однако понятие композиции двух структур означает специфическое произведение множеств, когда с одним шагом вдоль (2,2;б) сопоставляется множество пар элементов структуры ранга (3,3;б), а следовательно, и множество возможных значений p_{μ}. А это, в свою очередь, приводит к ветвлению возможностей переходов из каждого состояния в множество других, каждое из которых будет характеризоваться своими координатами x^{μ}. Отсюда сразу же возникает понятие *весовых вкладов* (амплитуд) как для переходов, так и для самих состояний. Это то, чего не хватало для перехода к квантовой механике в рамках одной структуры ранга (2,2;б). Теперь все это есть, и можно перейти к фейнмановской формулировке квантовой механики.

Существенное отличие нашего подхода от фейнмановского состоит в том, что Фейнман развил теорию для нерелятивистской квантовой механики скалярных частиц, а в нашем подходе рассматрива-

ются сразу релятивистские спинорные частицы. Для перехода к такой задаче от первых работ Фейнмана, во–первых, нужно было перейти к релятивистскому случаю и, во–вторых, перейти от бозонных частиц к фермионным. Каждое из этих обобщений в его подходе представляет собой нетривиальную проблему. Этот вопрос более подробно рассмотрен в третьей части этой книги. Там же детально разобрано получение уравнения Дирака в координатном пространстве–времени, поэтому здесь ограничимся лишь указанием ключевых моментов такой теории.

Во–первых, следует перейти от введенных 2–компонентных выражений типа (2.8.1) и 2.8.4) к двум типам величин, определенных в четных и нечетных значениях дискретных параметров эволюции структуры ранга (2,2;б):

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1 \to \psi_{\text{Н}}(x_1^0, x_1^i); \quad \psi_3 \to \psi_{\text{Н}}(x_3^0, x_3^i), \ldots\ldots \\ &\psi_2 \to \psi_{\text{Ч}}(x_2^0, x_2^i); \quad \psi_4 \to \psi_{\text{Ч}}(x_4^0, x_4^i), \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (2.8.5)$$

Во–вторых, эти величины нужно будет понимать как функции множества различных значений x в духе волновых функций квантовой механики.

В–третьих, выражения (2.8.2) и (2.8.4) должны быть обобщены на случай множества возможных значений p_μ и x^μ и возведены в ранг *динамического принципа* теории. Предполагается, что область возможных значений x^i и p_i образует континуум. Вводится интегрирование по всем их возможным значениям. Тогда выражения (2.8.2) и (2.8.4) заменяются на следующие [10]:

$$\psi_{\text{Ч}}(x_2^0, x_2^i) = \frac{1}{m_0 c} \int\int \sigma^\mu_{(-)} p_{\mu(1)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_{0(1)}(x_2^0 - x_1^0) - p_{i(1)}(x_2^i - x_1^i)\right]\right\} \cdot$$

$$\cdot \psi_{\text{Н}}(x_1^0, x_1^i) \cdot \frac{d^3 p_{(1)}}{N_p} \cdot \frac{d^3 x_1}{N_x} \qquad (2.8.6)$$

$$\psi_{\text{Н}}(x_3^0, x_3^i) = \frac{1}{m_0 c} \int\int \sigma^\mu_{(+)} p_{\mu(2)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_{0(2)}(x_3^0 - x_2^0) - p_{i(2)}(x_3^i - x_2^i)\right]\right\} \cdot$$

$$\cdot \psi_{\text{Ч}}(x_2^0, x_2^i) \cdot \frac{d^3 p_{(2)}}{N_p} \cdot \frac{d^3 x_2}{N_x} \qquad (2.8.7)$$

где N_p и N_x — некоторые нормирующие множители, типичные для фейнмановской формулировки квантовой механики.

После интегрирования, доопределений 2–компонентных функций $\psi'_{\text{Ч}}$ и $\psi'_{\text{Н}}$ на область нетипичных для них значений параметров эво-

люции и объединения их в одну 4–компонентную функцию приходим к стандартному уравнению Дирака для свободной частицы в координатном пространстве

$$\left[i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{m_0 c}{\hbar} \right] \psi = 0. \qquad (2.8.8)$$

Затем от этих уравнений можно перейти к уравнению Клейна–Фока, а далее к нерелятивистскому уравнению Шредингера.

Изложенные здесь соображения и результаты составляют важную часть бинарной геометрофизики и образуют основу теории классического пространства–времени. Сформулируем некоторые выводы:

1. В изложенной здесь теории *классическое пространство–время понимается как вторичное понятие*, возникающее в результате композиции двух бинарных структур рангов (2,2) и (3,3;б), которые образуют первичные блоки теории.

2. Две использованные структуры имеют минимальный ранг в иерархии бинарных физических структур. Характерно, что каждая из этих структур в отдельности приводит к псевдоевклидовым пространствам, что еще раз свидетельствует, что *пространство и время образуют единое неразрывное целое.* Размерность пространства–времени определяется структурой ранга (3,3;б).

3. Примечательно, что в данном подходе *классическое пространство–время и квантовая механика формируются параллельно* в отличие от стандартной теории, в которой формулировка квантовой механики опирается на предположение об уже имеющемся классическом пространстве–времени и на ряд других классических понятий.

4. Несомненным достоинством данной теории является *фермионный характер частиц*, для которых она строится.

5. Развиваемый здесь подход заставляет выбрать из всех известных формулировок квантовой теории *фейнмановскую.* Это окажется существенным и для развития последующих элементов теории, в частности, при выборе способа описания взаимодействий.

6. Особо следует подчеркнуть, что в рамках структур рангов (2,2) и (3,3;б) правильнее было бы говорить о *прообразе классического пространства–времени*, поскольку пока речь шла об отдельной массивной частице и об отношениях между ее состояниями. Пока не было других частиц, а следовательно, нельзя было говорить об отношениях между ними. Пока не было оснований говорить о реально наблюдаемых величинах. Такая возможность появится при переходе к бинарным структурам более высокого ранга.

7. В рамках теории структур рангов (2,2) и (3,3;б) невозможно было ввести заряды частицы, *нельзя было говорить о взаимодействии массивных лептонов.* Эти структуры не содержат необходимых

для этого понятий. Все это возникает в рамках следующей в иерархии — структуры ранга (4,4;а).

8. В современной литературе обсуждается так называемая *твисторная программа Р.Пенроуза* [45], по целевой направленности *родственная нашему подходу*. В ее основу кладется пара спиноров (твистор), из которых предполагается вывести классическое пространство–время. В теории твисторов массивные частицы описываются парой твисторов, в нашем подходе им соответствуют две пары элементов структуры ранга (3,3;б). Однако исходные принципы и методы построения теории твисторов существенно отличаются от бинарной геометрофизики. В частности, основное твисторное уравнение Пенроуза для координат в нашем подходе может быть сопоставлено с прообразом уравнения Дирака (2.5.16) в импульсном пространстве.

ГЛАВА 2.3

ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В РАМКАХ СТРУКТУРЫ РАНГА (4,4;а)

§ 2.9. Теория Калуцы–Клейна и принципы описания взаимодействий на примере структуры ранга (4,4;а)

Принципы описания физических взаимодействий в рамках бинарной геометрофизики тесно связаны, с одной стороны, с идеологией и методами единых многомерных геометрических теорий типа теории Калуцы–Клейна, а с другой стороны, — с теорией прямого межчастичного взаимодействия фоккеровского типа. В этом параграфе сосредоточимся на принципах, общих с многомерными теориями, и продемонстрируем их на примере структуры ранга (4,4;а).

Основная идея теории типа Калуцы–Клейна состоит в том, что физические взаимодействия (кроме гравитационного) обусловлены проявлениями более высоких размерностей, чем четыре. Напомним, что геометрию Минковского можно рассматривать как частный случай унарной структуры ранга 6. В нашем подходе развиваются своеобразные , *бинарные геометрии*. В них вместо понятия размерности выступает ранг структуры. Отсюда становится естественным *первый принцип описания физических взаимодействий в бинарной геометрофизике — на основе перехода к бинарным структурам более высокого ранга*, нежели это было необходимо для описания прообраза классического пространства–времени. Первой такой структурой более высокого ранга является структура ранга (4,4;а).

В теориях типа Калуцы–Клейна ключевым выражением, которое соответствует физическому лагранжиану, является многомерная скалярная кривизна ${}^{n}R$. Из нее выделяется 4–мерная скалярная кривизна, соответствующая стандартной общей теории относительности Эйнштейна. Все остальные слагаемые трактуются как описывающие другие физические взаимодействия: электромагнитное, электрослабое и т.д. В теориях физических структур своеобразным *аналогом скалярной кривизны следует считать $n\times n$–отношение максимального ранга*. Для совместного описания частиц, описываемых структурами данного и меньшего рангов, следует учитывать и фундаментальные отношения меньшего ранга. Из фундаментального $n\times n$–отношения можно выделить слагаемые, соответствующие структурам меньшего ранга. В данном случае можно выделить слагаемые, соот-

ветствующие прообразу классического пространства–времени, но при этом остается ряд новых слагаемых. Это позволяет сформулировать второй принцип: *физические взаимодействия описываются дополнительными (к структуре ранга* (3,3;б)) *слагаемыми в фундаментальных n×n–отношениях.*

В теориях Калуцы–Клейна принципиально важный момент связан с введением зарядов частиц. Напомним, что в качестве зарядов там выступают компоненты импульсов частиц, соответствующие дополнительным размерностям. Например, в 5–мерной теории Калуцы–Клейна электрический заряд частицы определяется формулой $q = -2\sqrt{k}\, p_5$, где k — ньютоновская постоянная, p_5 — пятая компонента импульса [5,6]. В нашем подходе как структура ранга (3,3;б), так и последующие описывают отношения в импульсном пространстве. Поэтому *дополнительные параметры элементов структур более высокого ранга будем трактовать пропорциональными зарядам частиц* (или их комбинациям). Это следует считать третьим принципом описания физических взаимодействий. Примечательно, что в многомерных теориях как сами дополнительные координаты, так и соответствующие им импульсы имеют выделенный характер.

Продемонстрируем эти принципы на примере структуры ранга (4,4;а). Прежде всего напомним, что закон этой структуры имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ 1 & a_{s\alpha} & a_{s\beta} & a_{s\gamma} & a_{s\delta} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.9.1)$$

Закон тождественно выполняется, если парные отношения $a_{i\alpha}$ определяются формулой

$$a_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i_0 + \alpha_0, \qquad (2.9.2)$$

т.е. каждый элемент этой структуры характеризуется тремя комплексными параметрами. Для элементов множества $\mathfrak{M}$ это параметры: i^1, i^2, i_0; для элементов множества $\mathfrak{N}$ это параметры: $\alpha^1, \alpha^2, \alpha_0$. Как видно из (2.9.2), аддитивные параметры α_0 и i_0 имеют выделенный характер. Согласно сформулированному третьему принципу эти параметры будем трактовать пропорциональными неким зарядам (точнее, комбинациям электрического и слабого зарядов).

Легко убедиться, что для структуры ранга (4,4;а) имеются три типа фундаментальных $n\times n$–отношений: 2×2–, 3×3– и 4×4–отношения. Выпишем их, предварительно введя характерные для дальнейшего обозначения:

$$\begin{bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}; \quad u_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2;$$

$$\begin{pmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = (i_0 - k_0) \times (\beta_0 - \alpha_0); \quad v_{i\alpha} = i_0 + \alpha_0. \tag{2.9.3}$$

Тогда фундаментальное 4×4–отношение записывается в виде

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ a_{s\alpha} & a_{s\beta} & a_{s\gamma} & a_{s\delta} \end{vmatrix} = \tag{2.9.4}$$

$$= \begin{bmatrix} i\,k \\ \alpha\beta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} j\,s \\ \gamma\delta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} i\,j \\ \alpha\beta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,s \\ \gamma\delta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} i\,s \\ \alpha\beta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,j \\ \gamma\delta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} k\,j \\ \alpha\beta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,s \\ \gamma\delta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k\,s \\ \alpha\beta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,j \\ \gamma\delta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} j\,s \\ \alpha\beta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,k \\ \gamma\delta \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} i\,k \\ \alpha\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} j\,s \\ \beta\delta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} i\,j \\ \alpha\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,s \\ \beta\delta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} i\,s \\ \alpha\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,j \\ \beta\delta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} k\,j \\ \alpha\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,s \\ \beta\delta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k\,s \\ \alpha\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,j \\ \beta\delta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} j\,s \\ \alpha\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,k \\ \beta\delta \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} i\,k \\ \alpha\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} j\,s \\ \beta\gamma \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} i\,j \\ \alpha\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,s \\ \beta\gamma \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} i\,s \\ \alpha\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,j \\ \beta\gamma \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k\,j \\ \alpha\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,s \\ \beta\gamma \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} k\,s \\ \alpha\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,j \\ \beta\gamma \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} j\,s \\ \alpha\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,k \\ \beta\gamma \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} i\,k \\ \beta\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} j\,s \\ \alpha\delta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} i\,j \\ \beta\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,s \\ \alpha\delta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} i\,s \\ \beta\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,j \\ \alpha\delta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k\,j \\ \beta\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,s \\ \alpha\delta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} k\,s \\ \beta\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,j \\ \alpha\delta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} j\,s \\ \beta\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,k \\ \alpha\delta \end{pmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} i\,k \\ \beta\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} j\,s \\ \alpha\gamma \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} i\,j \\ \beta\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,s \\ \alpha\gamma \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} i\,s \\ \beta\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,j \\ \alpha\gamma \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} k\,j \\ \beta\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,s \\ \alpha\gamma \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k\,s \\ \beta\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,j \\ \alpha\gamma \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} j\,s \\ \beta\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,k \\ \alpha\gamma \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} i\,k \\ \gamma\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} j\,s \\ \alpha\beta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} i\,j \\ \gamma\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,s \\ \alpha\beta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} i\,s \\ \gamma\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} k\,j \\ \alpha\beta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k\,j \\ \gamma\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,s \\ \alpha\beta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} k\,s \\ \gamma\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,j \\ \alpha\beta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} j\,s \\ \gamma\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} i\,k \\ \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что здесь каждая из 36 комбинаций ивариантна относительно преобразований из группы $SL(2,C)$.

Фундаментальное 3×3–отношение представляется в виде

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} \end{vmatrix} = v_{i\alpha} \cdot \begin{bmatrix} k\,j \\ \beta\gamma \end{bmatrix} - v_{k\alpha} \cdot \begin{bmatrix} i\,j \\ \beta\gamma \end{bmatrix} + v_{j\alpha} \cdot \begin{bmatrix} i\,k \\ \beta\gamma \end{bmatrix} -$$

$$- v_{i\beta} \cdot \begin{bmatrix} k\,j \\ \alpha\gamma \end{bmatrix} + v_{k\beta} \cdot \begin{bmatrix} i\,j \\ \alpha\gamma \end{bmatrix} - v_{j\beta} \cdot \begin{bmatrix} i\,k \\ \alpha\gamma \end{bmatrix} +$$

$$+ v_{i\gamma} \cdot \begin{bmatrix} k\,j \\ \alpha\beta \end{bmatrix} - v_{k\gamma} \cdot \begin{bmatrix} i\,j \\ \alpha\beta \end{bmatrix} + v_{j\gamma} \cdot \begin{bmatrix} i\,k \\ \alpha\beta \end{bmatrix} +$$

плюс 9 комбинаций слагаемых вида $u_{i\alpha} \cdot \begin{pmatrix} ik \\ \alpha\beta \end{pmatrix}$. (2.9.5)

Наконец, фундаментальные 2×2–отношения имеют вид

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} ik \\ \alpha\beta \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} ik \\ \alpha\beta \end{pmatrix} + v_{k\beta}u_{i\alpha} + v_{i\alpha}u_{k\beta} - v_{k\alpha}u_{i\beta} - v_{i\beta}u_{k\alpha}\,. \quad (2.9.6)$$

Согласно второму из сформулированных выше принципов ключевую роль в теории структуры ранга (4,4;а) играет фундаментальное 4×4–отношение (2.9.4). По определению, оно описывает переход от 4 элементов в начальном состоянии к 4 элементам в конечном состоянии. Как нам уже известно, массивные лептоны описываются парой элементов. Следовательно, можно ожидать, что *фундаментальные 4×4–отношения описывают процесс взаимодействия двух массивных лептонов.* В согласии с нашим подходом массивные лептоны будем изображать двойной линией, тогда этот процесс можно изобразить в виде типичной фейнмановской диаграммы (рис. 17).

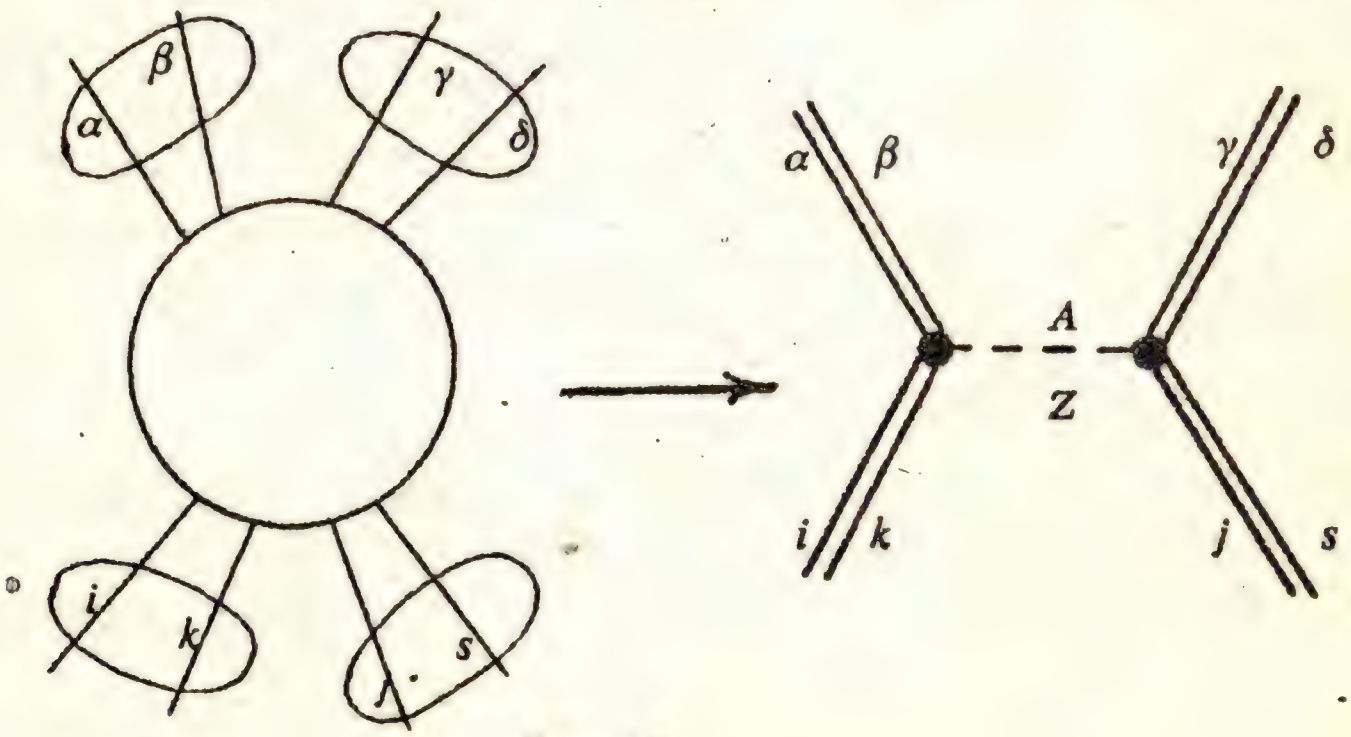


Рис. 17.

Очевидно, что нейтрино как безмассовый лептон, описываемый одним элементом структуры ранга (3,..,б), должен графически изображаться одной линией. Для описания взаимодействия нейтрино с электроном следует использовать фундаментальное 3×3–отношение (2.9.5). Оно проиллюстрировано на рис. 18, где электрону соответствуют пары элементов i, k и α, β, а нейтрино — элементы j (на входе) и γ (на выходе).

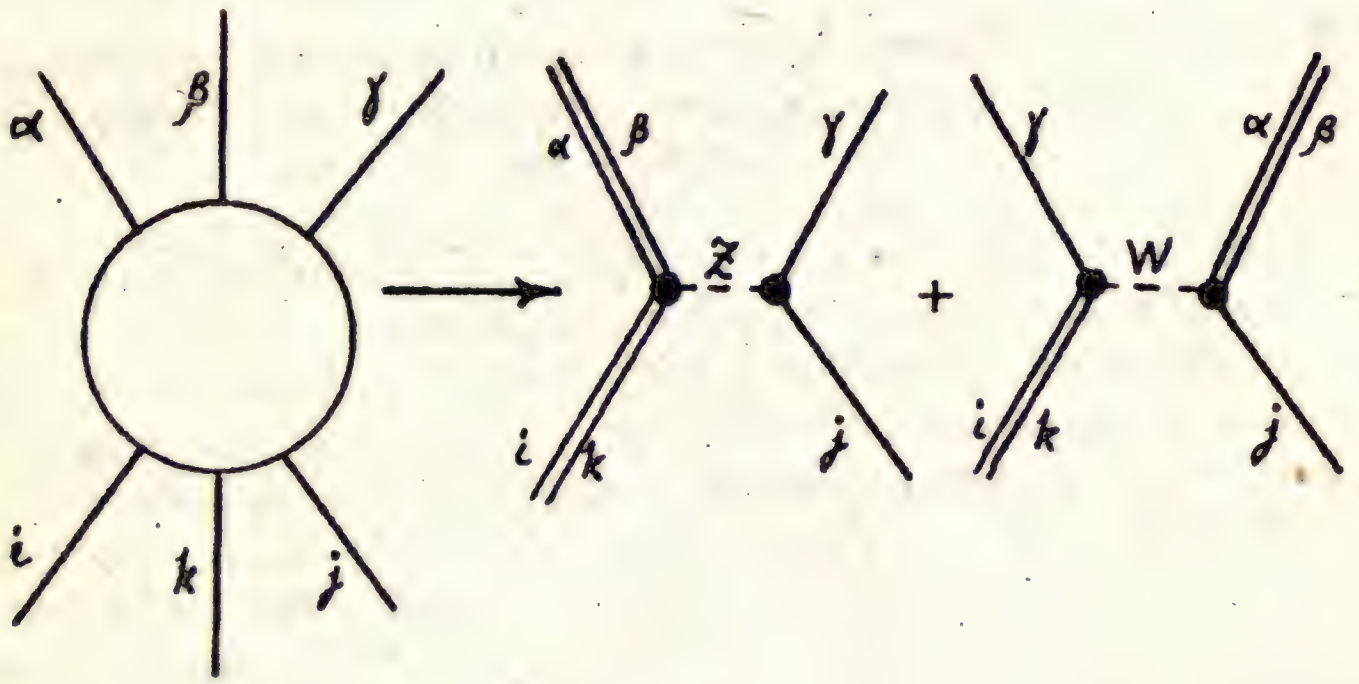


Рис. 18

Взаимодействие двух нейтрино должно описываться фундаментальным 2×2–отношением (2.4.3) структуры ранга (3,3;а) (рис. 19)

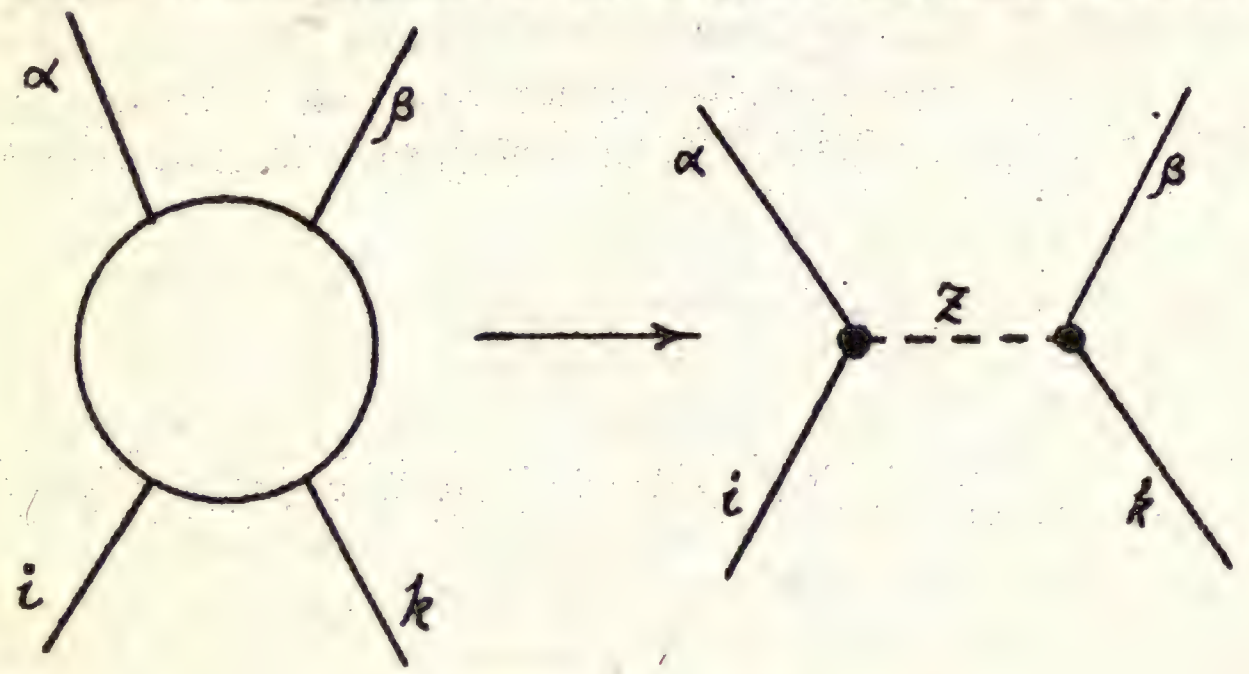


Рис. 19.

Однако этот процесс можно описывать и фундаментальным 2×2-отношением (2.4.3) структуры ранга (4,4;а) для частного случая, когда элементы имеют нулевые дополнительные параметры. Как видно из (2.9.4), в нем содержится выражение (2.4.3).

Дальнейшая наша задача состоит в том, чтобы показать соответствие выражений (2.9.4)—(2.9.6) известным лагранжианам теории электромагнитных и электрослабых взаимодействий (модели Вайнберга–Салама).

§ 2.10. Переформулировка теории прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия в терминах структуры ранга (4,4;а)

Следует подчеркнуть, что теория Калуцы–Клейна, с которой сравнивалась бинарная геометрофизика, является типичной теорией поля, т.е. теорией близкодействия. В таких теориях взаимодействия описываются контактным образом, т.е. передаются от одной частицы к другой неким переносчиком — полем, проходящим через все промежуточные точки. В нашем подходе понятие поля отсутствует, и отношения задаются между частицами (элементами структуры) глобально, т.е. развиваемая здесь теория имеет дальнодействующий характер. Поэтому для перехода к известной теории, например, электромагнетизма нужно подобрать наиболее подходящую формулировку. Таковой является теория прямого межчастичного электромагнитного взаимодействия (ТПМЧЭВ) фоккеровского типа. Истоки этой теории можно найти в трудах К.Гаусса, затем в ее становлении участвовали Х.Тетроде, А.Фоккер, Я.И.Френкель, Р.Фейнман, Ф.Хойл, П.Дэвис и многие другие физики–теоретики. Эта теория изложена в ряде монографий (см. [7]), но поскольку она все–таки мало известна широкому кругу читателей, напомним здесь основные идеи этой теории.

В ТПМЧЭВ с самого начала постулируется классическое 4–мерное пространство–время (в нашем подходе это следствие композиции бинарных структур рангов (2,2) и (3,3;б)) и находящиеся в нем заряженные частицы (у нас это элементы бинарной структуры ранга (4,4;а)). Как и у нас, в этой теории среди первичных категорий отсутствуют поля переносчиков взаимодействий. Они возникают как вспомогательные вторичные понятия. Покажем, как это делается.

Выберем две произвольные заряженные частицы и пометим их индексами i и j. Согласно *принципу действия Фоккера* их электромагнитное взаимодействие описывается следующим вкладом в классическое действие:

$$S_{int}(i, j) = -e_i e_j \iint \delta\left(s^2(i. j)\right) g_{\alpha\beta}\, dx_i^\alpha\, dx_j^\beta = \\ = -\iint J^\alpha(i) J_\alpha(j) \cdot \delta\left(s^2(i, j)\right) ds_i\, ds_j\,, \tag{2.10.1}$$

где e_i и e_j — электрические заряды этих частиц, $J^\alpha(i) = e(i)\, dx_i^\alpha / ds_i$ — вектор 4–тока частицы i, dx_i^α, dx_j^β — изменения координат, ds_i, ds_j — смещения вдоль мировых линий частиц, $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор пространства–времени Минковского, $s^2(i, j)$ — квадрат интервала между положениями частиц на их мировых линиях,

$$\delta\left(s^2(i, j)\right) = \delta(c^2 t_{ij}^2 - r_{ij}^2) = \\ = \frac{1}{2|r_{ij}|} \cdot \left[\delta(ct_{ij} - r_{ij}) + \delta(ct_{ij} + r_{ij})\right] \tag{2.10.2}$$

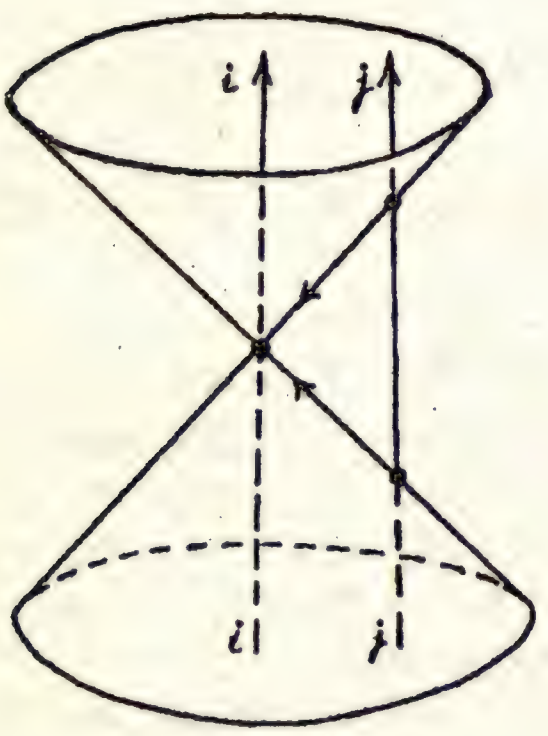


Рис. 20.

— релятивистская δ–функция, показывающая, что взаимодействие осуществляется тогда, когда одна частица оказывается на поверхности светового конуса другой (см. рис. 20). Два слагаемых в (2.10.2) справа соответствуют запаздывающим и опережающим взаимодействиям. Полное действие для системы взаимодействующих электрических зарядов записывается в виде

$$S = -\sum_i m_i \int ds_i - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \neq j}\sum J^\alpha(i) J_\alpha(j) \cdot \delta\left(s^2(i, j)\right) ds_i\, ds_j\,, \tag{2.10.3}$$

где m_i — масса покоя частицы с индексом i. Первое слагаемое справа соответствует классическому действию для свободных частиц. Во втором слагаемом, описывающем парные электромагнитные взаимодействия, суммирование производится по парам несовпадающих частиц.

Поясним, как в ТПМЧЭВ возникает понятие электромагнитного потенциала A_α. Для этого выделим из (2.10.3) одну частицу i и запишем для нее действие S_i в форме

$$S_i = -m_i \int ds_i - \sum_{j \neq i} \int J^\alpha(i) \cdot A_\alpha(i, j)\, ds_i\,, \qquad (2.10.4)$$

где введено обозначение для отдельных вкладов

$$A_\alpha(i, j) = \int J_\alpha(j) \cdot \delta\left(s^2(i, j)\right) ds_j\,, \qquad (2.10.5)$$

которые следует интерпретировать как векторный электромагнитный потенциал, создаваемый зарядом j в том месте, где находится заряд i.

Объединяя вклады всех заряженных частиц, получаем суммарный элктромагнитный потенциал $A_\alpha(i)$ в месте нахождения заряда i:

$$A_\alpha(i) = \sum_{j \neq i} A_\alpha(i, j) \qquad (2.10.6)$$

и действие для частицы i в привычном для электродинамики Максвелла–Лоренца виде

$$S_i = -m_i \int ds_i - \int J^\alpha(i) \cdot A_\alpha(i)\, ds_i\,. \qquad (2.10.7)$$

Однако следует подчеркнуть, что *в ТПМЧЭВ бессмысленно говорить о поле, т.е. о потенциале A_α в точках пространства–времени, где отсутствуют электрические заряды*, это находится в полном соответствии с духом теории физических структур, описывающей отношения между элементами, образующими состояния частиц, а не между множеством дополненных до континуума идеализированных точек классического пространства–времени.

В оригинальных статьях и монографиях [7] показано, как на основе введенных здесь понятий и определений строится вся классическая и квантовая электродинамика, изоморфная по своим выводам стандартной теории электромагнитного поля. В ней вместо уравнений Максвелла имеются тождества; условия Лоренца удовлетворяются автоматически.

Вернемся к фундаментальному 4×4–отношению (2.9.4) структуры ранга (4,4;а). Оно состоит из совокупности произведений пар слагаемых вида $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$. В $S_{int}(i, j)$ в (2.10.1) под знаком интеграла также стоит произведение двух слагаемых: а) вектор–векторного

отношения $J^{\alpha}(i)\,J_{\alpha}(j)$ и б) скалярного (δ–функция). Сопоставим эти пары в двух теориях друг другу.

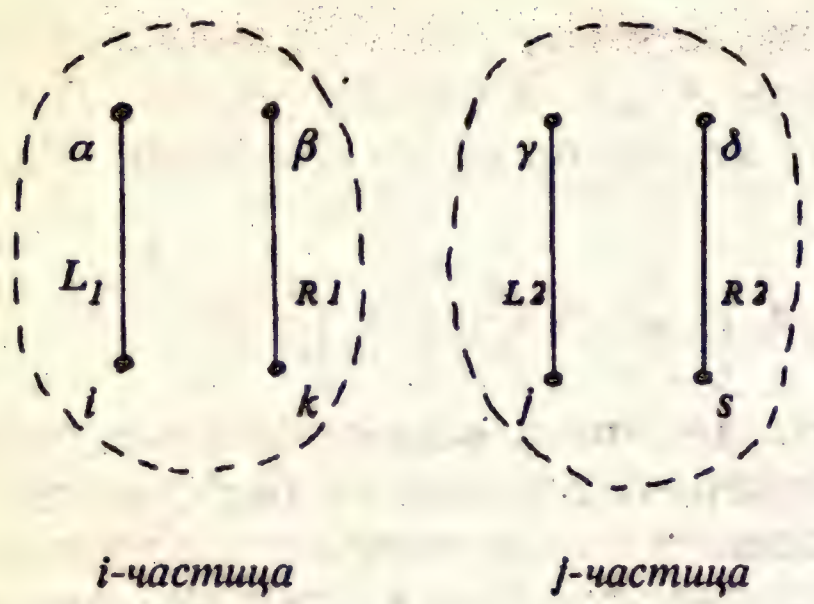


Рис. 21.

Пусть две массивные частицы описываются парами элементов структуры ранга (4,4;а) $(i, k; \alpha, \beta)$ и $(j, s; \gamma, \delta)$ соответственно (см. рис. 21). В выражении (2.10.3) для двух частиц перейдем к более удобной для нас записи, введя 4–импульсы двух частиц. Тогда выражения в двух теориях можно сопоставить в виде таблицы:

ТПМЧЭВ	$S_{ij}=-m_i\int ds_i-m_j\int ds_j+\iint \frac{e_i}{m_i}\,p^{\alpha}(i)\,\frac{e_j}{m_j}\,p_{\alpha}(j)\,\delta\left(s^2(i,j)\right)ds_i ds_j$
бинарная геометрофизика	$\begin{bmatrix} ik \\ \alpha\beta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} js \\ \gamma\delta \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} js \\ \gamma\delta \end{bmatrix}\begin{pmatrix} ik \\ \alpha\beta \end{pmatrix}+\sum$ слагаемых вида $\begin{bmatrix} ij \\ \alpha\gamma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} ks \\ \beta\delta \end{pmatrix}$

(2.10.8)

В последней сумме, вообще говоря, могут содержаться 16 комбинаций, обведенных в середине (2.9.4) пунктирной линией. В них каждое выражение $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$ содержит по паре противоположных элементов из разных частиц.

Покажем, что скалярное произведение двух импульсов $p^{\alpha}(i)p_{\alpha}(j)$ выражается через совокупность выражений типа $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$. Для этого представим импульсы двух частиц через спинорные параметры составляющих их элементов структуры согласно формулам (2.5.2) и (2.5.4):

$$p^0(i)=\frac{1}{2}\cdot(i^1\alpha^1+i^2\alpha^2+k^1\beta^1+k^2\beta^2);$$

$$p^1(i)=\frac{1}{2}\cdot(i^1\alpha^2+i^2\alpha^1+k^1\beta^2+k^2\beta^1);$$

$$p^2(i)=\frac{i}{2}\cdot(i^1\alpha^2-i^2\alpha^1+k^1\beta^2-k^2\beta^1);$$

$$p^3(i) = \frac{1}{2} \cdot (i^1\alpha^1 - i^2\alpha^2 + k^1\beta^1 - k^2\beta^2).$$

Компоненты импульса второй частицы запишутся аналогично путем замены i, k, α, β на элементы j, s, γ, δ соответственно. Построив скалярное произведение двух векторов, легко убедиться, что оно представляется в виде

$$p^\alpha(i)p_\alpha(j) = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} i & j \\ \alpha & \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & s \\ \alpha & \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & j \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & s \\ \beta & \delta \end{bmatrix}\right\} \qquad (2.10.10)$$

Входящие сюда выражения содержатся в диагональных слагаемых обведенной в (2.9.4) пунктирными линиями части формулы. Заметим, что оставшиеся там 12 слагаемых соответствуют перестановкам элементов в определении двух частиц. Совокупность выражений

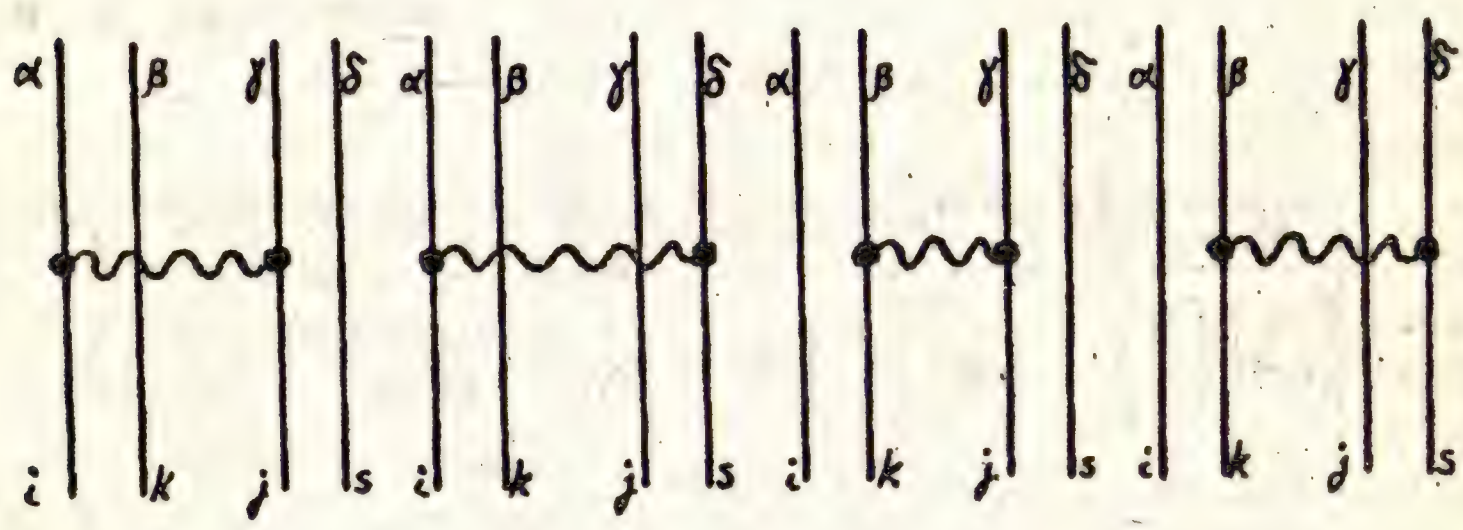


Рис. 22

в (2.10.10) можно проиллюстрировать диаграммами (см. рис. 22), показывающими, какие отношения между парами элементов ими описываются.

Перейдем к обсуждению скалярных слагаемых типа $\begin{pmatrix} k & s \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, состоящих из дополнительных параметров. В интересующих нас диагональных выражениях в (2.9.4) эти слагаемые представляются в виде

$$\begin{pmatrix} k & s \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = -(k_0\beta_0 + s_0\delta_0) + k_0\delta_0 + s_0\beta_0 ;$$

$$\begin{pmatrix} k & j \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = -(k_0\beta_0 + j_0\gamma_0) + k_0\gamma_0 + j_0\beta_0 ;$$

$$\begin{pmatrix} i & s \\ \alpha & \delta \end{pmatrix} = -(i_0\alpha_0 + s_0\delta_0) + i_0\delta_0 + s_0\alpha_0 ; \qquad (2.10.11)$$

$$\begin{pmatrix} i & j \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} = -(i_0\alpha_0 + j_0\gamma_0) + i_0\gamma_0 + j_0\alpha_0 .$$

Здесь в скобках выделены произведения параметров внутри отдельных частиц. Эти выражения оказываются для данной цели несущественными. Интерес представляют оставшиеся комбинации параметров, принадлежащих разным частицам.

Очевидно, что электромагнитным взаимодействиям соответствует тот частный случай, когда все скалярные коэффициенты (2.10.11) перед вектор–векторными слагаемыми можно считать одинаковыми. Это выполняется в том случае, когда для взятых частиц

$$i_0 = k_0 \tilde{} \frac{e_i}{m_i} ; \quad \alpha_0 = \beta_0 \tilde{} \frac{e_i}{m_i} ; \quad s_0 = j_0 \tilde{} \frac{e_j}{m_j} ; \quad \gamma_0 = \delta_0 \tilde{} \frac{e_j}{m_j} ; \qquad (2.10.12)$$

где e_i и e_j — электрические заряды, а m_i и m_j — массы частиц. При такой интерпретации скалярных параметров можно записать

$$\sum \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \sim \frac{e_i}{m_i} p^\alpha(i) \cdot \frac{e_j}{m_j} p_\alpha(j) = J^\alpha(i)\, J_\alpha(j), \qquad (2.10.13)$$

т.е. в рамках структуры ранга (4,4;а) возникает возможность говорить об описании ток–токового взаимодействия двух заряженных частиц.

Особо подчеркнем, что в (2.10.12) параметры элементов лишь пропорциональны отношениям электрического заряда к массе. Это позволяет ввести в параметры еще сомножители, которые в конце концов приводят к возникновению δ-функции, пока еще недостающей для окончательного сопоставления в (2.10.8). Напомним, что структуры рангов (3,3;б) и (4,4;а) описывают отношения в импульсном (или, теперь можно сказать точнее,– в зарядово–импульсном пространстве). Для перехода к координатному пространству-времени, в котором охарактеризована выше ТПМЧЭВ, и для доказательства полного соответствмя двух теорий необходимо произвести композицию структуры ранга (4,4;а) со структурой ранга (2,2) аналогично тому, как это сделано в 2.7.

§ 2.11. Модель электрослабых взаимодействий в терминах структуры ранга (4,4;a)

При описании электромагнитных взаимодействий в терминах структуры ранга (4,4;a) были использованы условия (2.10.12), означающие $i_0 - k_0 = 0$ для двух элементов одной частицы.

Если допустить $i_0 \neq k_0$, то в теории возникает еще один заряд, и по нему можно ввести еще один тип взаимодействия опять–таки в духе прямого межчастичного взаимодействия. Он соответствует взаимодействию лептонов через промежуточные Z– и W–бозоны в стандартной модели электрослабых взаимодействий Вайнберга–Салама. При этом оказывается, что все основные понятия и соотношения модели Вайнберга–Салама можно естественным образом переинтерпретировать в терминах структуры ранга (4,4;a). Приступая к этой задаче, не будем забывать о двух обстоятельствах: во–первых, речь будет идти об отношениях в импульсном пространстве, и, во–вторых, будем помнить, что модель Вайнберга–Салама является полевой теорией, и для сопоставления с бинарной геометрофизикой нужно будет перевести на язык прямого межчастичного взаимодействия.

1. Напомним, что в уже ставшей классической модели Вайнберга–Салама описываются электрослабые взаимодействия лептонов (одного поколения): электронов e и электронного нейтрино ν. В нашем подходе эти частицы также определены. В модели Вайнберга–Салама принципиально важным является разбиение электрона на левую e_L и правую e_R компоненты. То же самое имеется и у нас. Состояния электрона описываются 4–компонентным столбцом ψ (см. (2.5.8)). Введем матрицу $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ и посмотрим, чему соответствуют у нас стандартным образом определяемые левые и правые компоненты электрона.

$$e_L = \tfrac{1}{2}(1 + i\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_R = \tfrac{1}{2}(1 - i\gamma_5)\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix};$$

$$\bar{e}_L = \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}(1 - i\gamma_5) = -(0, 0, \alpha^1, \alpha^2); \qquad (2.11.1)$$

$$\bar{e}_R = \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}(1 + i\gamma_5) = -(k^1, k^2, 0, 0).$$

Следовательно, две пары элементов i, α и k, β структуры соответствуют левым $e_L, \bar{e}_L$ и правым $e_R, \bar{e}_R$ компонентам электрона (см. рис.21).

В нашем подходе нейтрино, по определению, описывается лишь двумя компонентами, поэтому пока не имеет смысла его называть ни левым ни правым. В модели Вайнберга–Салама нейтрино является левым (если его масса покоя равна нулю), и проблемой является вопрос о его правой компоненте. У нас такого вопроса нет, и для большего соответствия с общепринятой теорией условно будем считать нейтрино тоже левым. Это значит, что описывая его 4–компонентной функцией, будем помещать два его параметра сверху.

В обеих сопоставляемых теориях векторы $\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi$ записываются в виде

$$\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi = (\overline{e}_L\gamma^{\mu}e_L) + (\overline{e}_R\gamma^{\mu}e_R) \qquad (2.11.2)$$

Пусть имееются два массивных лептона, описываемых элементами структуры так, как это изображено на рис. 21. Тогда вектор-векторные комбинации $\begin{bmatrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{bmatrix}$ в бинарной геометрофизике можно переинтерпретировать в общепринятых терминах модели Вайнберга–Салама

$$\begin{bmatrix} i & j\\ \alpha & \gamma\end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L});$$

$$\begin{bmatrix} i & s\\ \alpha & \delta\end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R});$$

$$\begin{bmatrix} k & j\\ \beta & \gamma\end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})(\overline{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L}); \qquad (2.11.3)$$

$$\begin{bmatrix} k & s\\ \beta & \delta\end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})(\overline{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R});$$

где e_{1L}, e_{1R} и e_{2L}, e_{2R} — соответственно левые и правые компоненты двух электронов. Аналогично, если элементами l и λ описывать состояния нейтрино ν_L, то имеем

$$\begin{bmatrix} i & l\\ \alpha & \lambda\end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(\overline{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})(\overline{\nu}_L\gamma_{\mu}\nu_L);$$

$$\begin{bmatrix} k & l\\ \beta & \lambda\end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(\overline{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})(\overline{\nu}_L\gamma_{\mu}\nu_L). \qquad (2.11.4)$$

Однако в полном смысле назвать все эти выражения произведениями токов пока в нашем подходе нельзя, так как здесь не введены заряды.

2. Теперь учтем дополнительные параметры. Чтобы не усложнять формулы коренными буквами конкретных элементов, введем для параметров новые обозначения:

$$L_1 = i_0;\ R_1 = k_0;\ \overline{L}_1 = \alpha_0;\ \overline{R}_1 = \beta_0;$$

$$L_2 = j_0;\ R_2 = s_0;\ \overline{L}_2 = \gamma_0;\ \overline{R}_2 = \delta_0;$$

где индекс снизу соответствует одной из частиц.

3. С помощью введенных обозначений перепишем фундаментальные отношения. В фундаментальном 4×4–отношении ограничимся лишь вектор–векторным взаимодействием двух массивных лептонов. Это значит, что как и в предыдущем параграфе мы оставим лишь четыре диагональные слагаемые в середине формулы (2.9.4). Используя тождество

$$aA + bB = \tfrac{1}{2}(a+b)\cdot(A+B) + \tfrac{1}{2}(a-b)\cdot(A-B), \quad (2.11.6)$$

где под a,b и A, B будем понимать соответственно скалярные и векторные части комбинаций $\begin{pmatrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{bmatrix}$, и делая естественные предположения, указанные слагаемые можно записать в виде

$$L(e,e) = C_4\left\{\left[-2(L_1\overline{L}_1+R_1\overline{R}_1+L_2\overline{L}_2+R_2\overline{R}_2)+(L_1+R_1)\cdot(\overline{L}_2+\overline{R}_2)+\right.\right.$$

$$\left.+(\overline{L}_1+\overline{R}_1)\cdot(L_2+R_2)\ \right]\cdot\left[(\bar{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})+(\bar{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})\right]\cdot$$

$$\cdot\left[(\bar{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L})+(\bar{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})\right]+\left[(L_1-R_1)\cdot(\overline{L}_2-\overline{R}_2)+(\overline{L}_1-\overline{R}_1)\cdot(L_2-R_2)\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\left[(\bar{e}_{1L}\gamma^{\mu}e_{1L})-(\bar{e}_{1R}\gamma^{\mu}e_{1R})\right]\cdot\left[(\bar{e}_{2L}\gamma_{\mu}e_{2L})-(\bar{e}_{2R}\gamma_{\mu}e_{2R})\right]\right\}, \quad (2.11.7)$$

где C_4 — некий коэффициент. Из двух слагаемых справа первое описывает электромагнитное взаимодействие двух массивных лептонов. Именно оно рассмотрено было в предыдущем параграфе. Второе слагаемое следует трактовать как описывающее взаимодействие двух массивных лептонов через Z–бозоны.

Вектор–векторное отношение электрона и нейтрино описывается двумя диагональными элементами из фундаментального 3×3–отношения (2.9.5):

$$L(e,\nu) = C_3\cdot\left\{v_{i\alpha}\cdot\begin{bmatrix}k & j\\ \beta & \gamma\end{bmatrix}+v_{k\beta}\cdot\begin{bmatrix}k & j\\ \beta & \gamma\end{bmatrix}\right\}=$$

$$= C_3 \cdot \Big\{ \Big[(L+R) + (\bar{L}+\bar{R}) \Big] \Big[(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) + (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \Big] (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L) +$$

$$+ \Big[(L-R) + (\bar{L}-\bar{R}) \Big] \Big[(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) - (\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \Big] (\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L) \Big\}, \qquad (2.11.8)$$

где C_3 — некий коэффициент, введенный для учета весового вклада 3×3–отношения в лагранжиан и для обеспечения нужной размерности.

Нейтринные параметры определены с точностью до произвольного множителя. Этим можно воспользоваться и считать. что ν_L и $\bar{\nu}_L$ содержат в себе слагаемые, ответственные за функцию Грина. Последняя может получиться лишь после композиции со структурой ранга (2,2). Фактически сделанное предложение означает также введение некоего заряда для нейтрино. Вектор–векторное взаимодействие двух нейтрино описывается фундаментальным 2×2–отношением (2.9.6)

$$L(\nu_1, \nu_2) = C_2 \cdot \begin{bmatrix} l & k \\ \lambda & \chi \end{bmatrix} = C_2 (\bar{\nu}_{1L} \gamma^\mu \nu_{1L})(\bar{\nu}_{2L} \gamma_\mu \nu_{2L}), \qquad (2.11.9)$$

где опять введен некоторый весовой множитель C_2.

Полному лагранжиану взаимодействия электронов и нейтрино через векторные бозоны соответствует сумма трех вкладов (2.11.7), (2.11.8), (2.11.9).

4. Как известно, фермионная часть лагранжиана Вайнберга–Салама имеет вид [46]

$$\mathfrak{L}_F = i\hbar c \Big\{ (\bar{\lambda} \gamma^\mu \partial^{**}_\mu \lambda) + (\bar{e}_R \gamma^\mu \partial^{**}_\mu e_R) + (\bar{\nu}_R \gamma^\mu \partial^{**}_\mu \nu_R) \Big], \qquad (2.11.10)$$

где последнее слагаемое вводится лишь, если предположить, что масса покоя нейтрино отлична от нуля. Здесь под λ понимается столбец из левых компонент нейтрино и электрона $\lambda = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$, а оператор ∂^{**}_μ имеет вид

$$\partial^{**}_\mu = I_2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - I_2 \frac{ig_1}{\hbar c} \cdot \frac{Y}{2} B_\mu - \frac{ig_2}{\hbar c} \cdot \frac{\sigma(k)}{2} A(k)_\mu, \qquad (2.11.11)$$

где g_1, g_2 — константы взаимодействия соответственно с векторным полем B_μ и триплетом полей $A_\mu(k)$ (где $k = 1,2,3$); Y — гиперзаряд; $\sigma(k)$ матрицы Паули. Этот лагранжиан выводится калибровочным образом на основе локализации $SU(2) \times U(1)$ — симметрии.

Опуская слагаемые с частными производными в (2.11.10), находим плотность лагранжиана взаимодействия фермионных полей с калибровочными векторными полями

$$\mathfrak{L}'_F = -\frac{g_1}{2} B_\mu \left[(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) + (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) + 2(\bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \right] + \\ + \frac{g_2}{2} \left\{ A_\mu(1) \left[(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) + (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) \right] - \right. \qquad (2.11.12)$$

$$\left. - iA_\mu(2) \left[(\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L) - (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L) \right] + A_\mu(3) \left[(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) - (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L) \right] \right\}.$$

Напомним, что электромагнитный потенциал A_μ и потенциал Z_μ нейтрального векторного поля строятся из первичных калибровочных полей следующим образом:

$$A_\mu = B_\mu \cos\Theta_w + A(3)_\mu \sin\Theta_w; \\ Z_\mu = -B_\mu \sin\Theta_w + A(3)_\mu \cos\Theta_w; \qquad (2.11.13)$$

где Θ_w — угол Вайнберга, значение которого в стандартной теории не фиксировано. Он выражается через константы взаимодействия g_1 и g_2

$$\sin\Theta_w = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}; \ \cos\Theta_w = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}. \qquad (2.11.14)$$

Электрический заряд электрона также выражается через эти константы

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1+g_2}}. \qquad (2.11.15)$$

Зная, как выражается электромагнитный векторный потенциал через токи взаимодействия частиц в ТПМЧЭВ, не представляет труда аналогично записать все другие поля в этом же духе. Опуская промежуточные выкладки, выпишем результат. Выражение (2.11.12) в форме теории прямого межчастичного взаимодействия выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{L}'_F \sim K_A e_1 e_2 \Big[(\bar{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) + (\bar{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})\Big] \times$$
$$\times \Big[(\bar{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + (\bar{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})\Big] +$$
$$+ \frac{K_Z}{4\cdot(g_1^2+g_2^2)}\Big[(g_1^2-g_2^2)(\bar{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L}) + 2g_1^2(\bar{e}_{1R}\gamma^\mu e_{1R})\Big] \times$$
$$\times \Big[(g_1^2-g_2^2)(\bar{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + 2g_1^2(\bar{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})\Big] +$$
$$+ \frac{K_Z}{4}(\bar{\nu}_{1L}\gamma^\mu \nu_{1L})\Big[(g_1^2-g_2^2)(\bar{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + 2g_1^2(\bar{e}_{2R}\gamma_\mu e_{2R})\Big] +$$
$$+ \frac{K_Z}{4}(\bar{\nu}_{2L}\gamma^\mu \nu_{2L})\Big[(g_2^2-g_1^2)(\bar{e}_{1L}\gamma_\mu e_{1L}) + 2g_2^2(\bar{e}_{1R}\gamma_\mu e_{1R})\Big] +$$
$$+ \frac{K_W}{4}g_2^2\Big[(\bar{\nu}_{1L}\gamma^\mu e_{1L})(\bar{e}_{2L}\gamma_\mu e_{2L}) + (\bar{e}_{1L}\gamma^\mu e_{1L})(\bar{\nu}_{2L}\gamma_\mu e_{2L})\Big] +$$
$$+ \frac{K_Z}{4}(g_1^2+g_2^2)(\bar{\nu}_{1L}\gamma^\mu \nu_{1L})(\bar{\nu}_{2L}\gamma_\mu \nu_{2L}). \qquad (2.11.16)$$

Здесь K_A, K_Z, K_W обозначают соответственно пропагаторы электромагнитного, Z– и W– полей. Кроме того, перед всем выражением стоит знак ~ , означающий лишь соответствие.

5. Сопоставляя, с одной стороны, выражение (2.11.16) модели Вайнберга–Салама и, с другой стороны, совокупность $L(e,e)$ + + $L(e,\nu)$ + $L(\nu,\nu)$, даваемую формулами (2.11.7), (2.11.8), (2.11.9) из теории структуры ранга (4,4;а), приходим к ряду выводов:

1). Фундаментальное 4×4–отношение (т.е. формула (2.11.7)) соответствует первым двум слагаемым формулы (2.11.16) справа. Для идеализированного случая двух массивных лептонов *можно найти угол Вайнберга.* Действительно, из сравнений этих выражений имеем

$$g_1^2 - g_2^2 = -2g_1^2 \to g_2 = \pm\sqrt{3}\cdot g_1. \qquad (2.11.17)$$

Выбирая положительный корень, находим идеализированное значение угла Вайнберга

$$\sin\Theta_W = \frac{1}{2} \to \Theta_W = 30°. \qquad (2.11.18)$$

2). Фундаментальное 3×3–отношение (т.е. формула (2.11.8)) соответствует третьему и четвертому слагаемым в (2.11.16)справа. Третья строка в (2.11.8) и третье и четвертое слагаемые в (2.11.16) описывают взаимодействие нейтрино с электроном через Z–бозон.

Они также приводят к уже найденному идеализированному значению угла Вайнберга.

3). Особый интерес представляет интерпретация взаимодействия через W–бозон в терминах теории структур. В нашем подходе такое взаимодействие обусловлено второй строкой в (2.11.8). Чтобы это показать, заметим, что комбинацию $\begin{bmatrix} k & l \\ \beta & \lambda \end{bmatrix}$ можно переписать несколькими способами:

$$\begin{bmatrix} k & l \\ \beta & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^1 & l^1 \\ k^2 & l^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta^1 & \lambda^1 \\ \beta^2 & \lambda^2 \end{bmatrix} = \\ = -\begin{bmatrix} k^1 & l^1 \\ k^2 & l^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda^1 & \beta^1 \\ \lambda^2 & \beta^2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k & l \\ \lambda & \beta \end{bmatrix}. \tag{2.11.19}$$

Но эта формула соответствует соотношению Фирца в стандартной теории

$$(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L)(\bar{e}_L \gamma_\mu e_L) = -(\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L)(\bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L). \tag{2.11.20}$$

На языке диаграмм левую и правую части этого соотношения можно проиллюстрировать диаграммами на рис. 23. Первая описывает взаимодействие через Z–бозон, а вторая — через W–бозон.

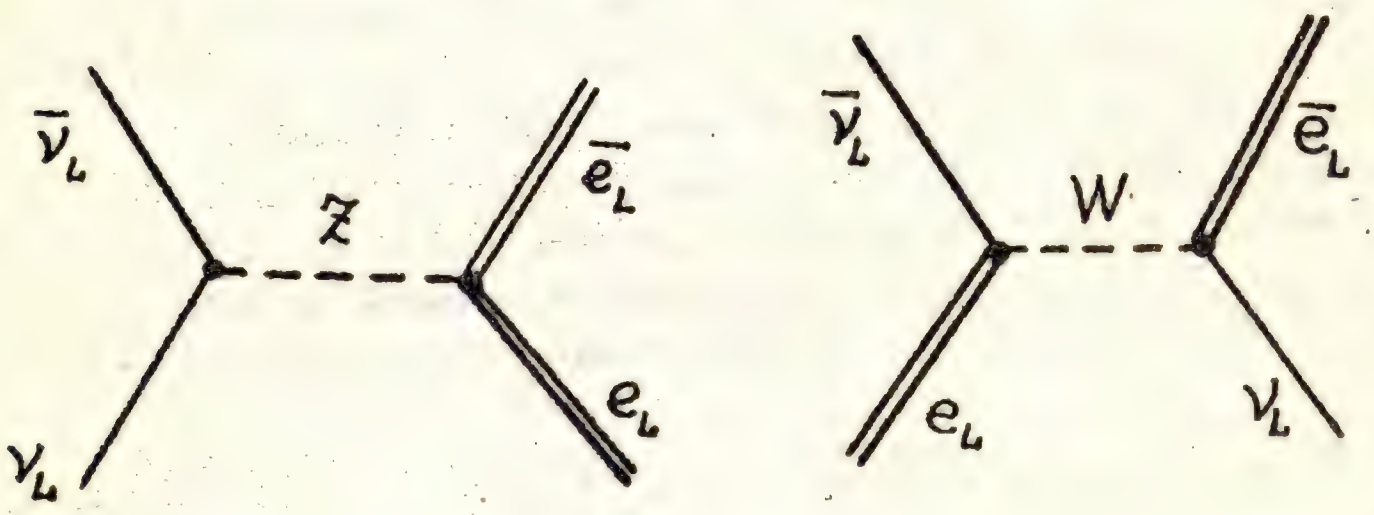


Рис. 23.

В формуле (2.11.8) суммарный вклад слагаемых $(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) \times (\bar{e}_R \gamma_\mu e_R)$ можно объяснить стандартным взаимодействием правой компоненты электрона с Z–бозоном, тогда как оставшиеся слагаемые, содержащие $(\bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) \times (\bar{e}_L \gamma_\mu e_L)$, можно представить в виде двух частей: выражения, необходимого для описания стандартного взаимодействия с Z–бозоном, и остатка, который с помощью

формул (2.11.19) и (2.11.20) можно перелицевать и интерпретировать как взаимодействие через W–бозон.

4). Фундаментальное 2×2–отношение (т.е. формула (2.11.9)) соответствует последней строке в (2.11.16). Очевидно, что имеющийся произвол в выборе коэффициентов C_4, C_3 и C_2 в формулах (2.11.7), (2.11.8) и (2.11.9) позволяет добиться соответствия с лагранжианом модели Вайнберга–Салама.

5). Следует обратить внимание на то, что внутренняя $SU(2)$–симметрия, имеющая в модели Вайнберга–Салама фундаментальный характер, в нашем подходе выступает как формальное вспомогательное понятие.

Наконец, следует отметить, что в этом параграфе мы не касались обсуждения взаимодействий частиц через хигтсовские скалярные бозоны. Последние в модели Вайнберга-Салама играют важную роль, в частности, позволяют вводить массы частиц. В нашем подходе скалярные взаимодействия описываются тем же фундаментальным 4×4–отношением, что и векторные взаимодействия. Только для этой цели нужно использовать в формуле (2.9.4) слагаемые, не вошедшие в обведенный пунктиром прямоугольник. Скалярные взаимодействия также описываются в духе теории прямого межчастичного взаимодействия и опираются на представление комбинации $\begin{bmatrix} i & k \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ еще в одном виде,

$$\begin{bmatrix} i & k \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = (\bar{e}_{1R} e_{1L})(\bar{e}_{2L} e_{2R}) \qquad (2.11.21)$$

когда пара элементов i, k принадлежит одной частице, а другая γ, δ — другой.

§ 2.12. Композиция структур рангов (2,2) и (4,4;а) и описание взаимодействующих частиц в классическом пространстве–времени

Для перехода от описанных выше закономерностей структуры ранга (4,4;а) к физической теории в классическом пространстве–времени необходимо произвести композицию этой структуры со структурой ранга (2,2) аналогично тому, как в § 2.7 производилась композиция структур рангов (3,3;б) и (2,2). Однако в данном случае возникает ряд новых характерных черт и понятий.

Напомним, что структура ранга (2,2) позволила ввести понятие *действия S отдельной частицы*. Структура ранга (3,3;б) позволила ввести 2–компонентные спиноры (биспиноры) и с их помощью определить *4–мерные импульсы частицы* p_μ. Множество возможных

значений импульсов составляло 4–мерное импульсное пространство с сигнатурой (+ - - -). Композиция стуктур рангов (3,3;б) и (2,2) позволила ввести *координаты* x^μ прообраза классического пространства–времени. Этот прообраз точнее можно было бы назвать *конфигурационным*, т.е. пространством–временем, сопоставленным с состояниями одной частицы.

Структура ранга (4,4;а) позволила рассматривать массивные частицы парами, а, следовательно, дала возможность описывать отношения в множестве массивных частиц. При этом оказались совмещенными 4–мерные импульсные пространства всех частиц — стало возможным говорить об *унивесальном 4–мерном импульсном пространстве.* Кроме того, элементы этой структуры обладают дополнительным параметром, связанным с зарядами. Все это вносит новые черты в композицию структур. Кратко охарактеризуем их.

1. При осуществлении композиции со структурой ранга (2,2) отдельно опишем композицию спинорных параметров со структурой ранга (2,2). Она опять позволяет представить действие каждой частицы в виде $S_{12} = p_\mu(x_2^\mu - x_1^\mu)$, т.е. ввести для каждой частицы свои конфигурационные пространства. Поскольку теперь импульсы p_μ всех частиц принадлежат одному и тому же универсальному импульсному пространству, то по определению во всех конфигурационных координатных пространствах должны осуществляться преобразования Лоренца с одинаковыми параметрами. Следовательно, сразу же встает вопрос о наложении друг на друга конфигурационных координатных пространств разных частиц. Напомним, что в каждом из координатных конфигурационных пространств была введена 4–параметрическая группа трансляций. Теперь эти преобразования оказываются задействованными для соотнесения конфигурационных пространств разных частиц. *В итоге оказывается определенным универсальное координатное пространство для всей совокупности массивных частиц.*

2. В универсальном координатном пространстве действия S различных частиц оказываются определенными вдоль различных мировых линий. Известно, что действия S пропорциональны длинам на соответствующих мировых линиях. С помощью процедуры хроногеометрии, описанной выше в рамках структуры ранга (2,2), точки и длины на мировых линиях различных частиц могут быть увязаны и сопоставлены друг с другом.

3. Композиция дополнительных (скалярных) параметров структуры ранга (4,4;а) и структуры ранга (2,2) позволяет ввести в теорию новую для развиваемой здесь конструкции векторную величину. Действительно, поскольку параметры i_0 и α_0 являются скалярными и поскольку из композиции со спинорными параметрами уже

введены понятия импульса p_μ и координаты x^μ, то естественно положить, что эти параметры выражаются через эти понятия. Легко показать, что для нас наиболее существенным является представление дополнительных параметров в виде

$$i_0 = f(k_\mu^{(1)} x_1^\mu) \text{ и } \alpha_0 = f(k_\mu^{(2)} x_2^\mu), \qquad (2.12.1)$$

где k_μ — некоторые *векторные коэффициенты, которые должны быть сопоставлены с импульсами промежуточных бозонов* (фотонов, Z– или W– бозонов) *в стандартной теории поля.*

Изложенное здесь можно трактовать как своеобразную "зашнуровку" параметров: при композиции спинорных компонент из 4–импульсов p_μ и действия S получаются координаты x^μ универсального координатного пространства–времени, а при композиции дополнительных параметров из них и координат x^μ обратно, возникают некие новые импульсы k_μ. Все это можно свести в одну схему, изображенную на рисунке 24.

	Структура ранга (2,2)	Структура ранга (3,3;б)	Структура ранга (4,4;а)	
			Спинорн.парам.	Дополн.парам.
Отдельные структуры (без композиции)	Действие S отдельной частицы	4–мерные импульсы p_μ	Спиноры и 4–мерные импульсы p_μ универсального пространства	Пропагаторы $i_0+k_0 \sim D_1$ $i_0-k_0 \sim D_2$ и заряд e $\varepsilon = e^2/\hbar c$
Композиция со структурой ранга (2,2)		Из соотношения $\Delta S = p_\mu \Delta X^\mu$ вводится пространство–время состояний частицы X^μ	Универсальное 4–мерное пространство–время X^μ	4–мерные импульсы k_μ переносчиков взаимодействий

Рис. 24.

4. В рамках структуры ранга (4,4;а) можно ввести прообраз уравнения Дирака формально как соотношение, связывающее спинорные и дополнительные параметры компонент частицы в начальном и конечном состояниях

$$\beta_r^{\cdot} = K_{rs}^{\cdot} i^s + \xi_r^{\cdot} f, \qquad (2.12.2)$$

где первое слагаемое справа соответствует записанному в (2.5.16) соотношению. Величина f зависит от скалярных параметров, а спинорный коэффициент ξ должен выражаться через спинорные параметры других частиц. Последние, в свою очередь, соответствуют токовым слагаемым в определении векторных потенциалов $\tilde{A}_\mu$. Развитие этой идеи приводит к обобщению прообраза уравнения Дирака (2.5.18) в импульсном пространстве

$$\sigma^{\mu}_{(-)}\left[p_\mu + m_0 c(i_0 + k_0)\tilde{A}_\mu + \ldots\right]\Psi_1 - m_0 c\Psi_2 = 0. \quad (2.12.3)$$

Здесь оставлено лишь слагаемое, описывающее электромагнитное взаимодействие. Вторая половина прообраза уравнения Дирака записывается очевидным образом.

5. Композиция структуры ранга (4,4;а) со структурой ранга (2,2) осуществляется по образу и подобию изложенного в § 2.7. Динамический принцип при этом формулируется, как в § 2.8, но с учетом слагаемых, описывающих взаимодействие. Для случая лишь электромагнитного взаимодействия динамический принцип записывается в виде

$$\Psi_{\text{Ч}}(x^0_2, x^i_2) = \frac{1}{m_0 c}\cdot\int\int \sigma^{\mu}_{(-)}\left[p_{\mu(1)} + m_0 c(i_0+k_0)\tilde{A}_\mu\right]\times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_{0(1)}(x^0_2 - x^0_1) - p_{i(1)}(x^i_2 - x^i_1)\right]\right\}\times \quad (2.12.4)$$
$$\times \Psi_{H}(x^0_1, x^i_1)\frac{d^3p_{(1)}}{N_p}\cdot\frac{d^3x_1}{N_x};$$

$$\Psi_{H}(x^0_3, x^i_3) = \frac{1}{m_0 c}\cdot\int\int \sigma^{\mu}_{(+)}\left[p_{\mu(2)} + m_0 c(i_0+k_0)\tilde{A}_\mu\right]\times$$
$$\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_{0(2)}(x^0_3 - x^0_2) - p_{i(2)}(x^i_3 - x^i_2)\right]\right\}\times \quad (2.12.5)$$
$$\times \Psi_{\text{Ч}}(x^0_2, x^i_2)\frac{d^3p_{(2)}}{N_p}\cdot\frac{d^3x_2}{N_x};$$

обобщающем формулы (2.8.6) и (2.8.7). В следующей части этой книги показано, как от этого выражения можно перейти к стандартному уравнению Дирака для электромагнитно взаимодействующих частиц в координатном пространстве–времени. В техническом плане

композиция со структурой ранга (2,2) означает процедуру Фурье–преобразования прообраза уравнения Дирака.

6. Еще раз напомним, что в данном подходе отсутствуют поля среди первичных понятий. Следовательно, в строгом смысле слова, нет и уравнений Максвелла и уравнений других бозонных полей, обычно понимаемых как калибровочные. Вместо них имеют место некие тождества, устанавливаемые для вводимых вспомогательных величин — векторных потенциалов, как это делается в ТПМЧЭВ.

7. От уравнения Дирака для взаимодействующих частиц можно перейти к рассмотрению связанных состояний из двух частиц типа водородоподобного атома. Поскольку пока были введены только лептоны, то такие связанные состояния следует понимать как позитроний.

Однако к теории водородоподобного атома можно подойти в рамках структуры ранга (4,4;а) еще до композиции со структурой ранга (2,2). Анализ теории структур позволяет сформулировать принцип, справедливый для всех бинарных структур, начиная с ранга (3,3;б): *фундаментальному n×n –отношению максимального ранга всегда соответствует некое связанное состояние* (частица, атом, ...). Так было в случае структуры ранга (3,3;б) — это был массивный лептон. Для структуры ранга (4,4;а) это атом позитрония. Забегая вперед, укажем, что для структуры ранга (4,4;б) это будет барион; для структуры ранга (5,5;а) — обычный атом водорода. Можно показать, что электромагнитным образом связанное состояние (позитроний) описывается диагональными элементами в обведенной части формулы (2.9.4). Для такого образования имеет место 0(4)–симметрия, открытая для подобной задачи описания водородоподобного атома В.А.Фоком в 30–х годах [47].

ГЛАВА 2.4

ОПИСАНИЕ СИЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ В РАМКАХ СТРУКТУР РАНГОВ (4,4;б) И (5,5;а)

§ 2.13. Бинарная структура ранга (4,4;б) и элементы хромодинамики

Перейдем к обсуждению роли и назначения следующей бинарной физической структуры ранга (4,4;б). После описания электрослабых взаимодействий в рамках структуры ранга (4,4;а) естественно ожидать, что структура ранга (4,4;б) поможет описать сильные взаимодействия. Забегая вперед, отметим, что в значительной мере это так, однако здесь складывается своеобразная ситуация. Как будет показано ниже, теория структуры ранга (4,4;б) очень напоминает теорию структуры ранга (3,3;б), изложенную в главе 2.2. В последней же, как мы знаем, взаимодействия отсутствовали (не было зарядов) — были лишь некие 4–мерные отношения. Однако, тем не менее, в рамках структуры ранга (3,3;б) уже можно было говорить о массивных лептонах, о группах преобразований, типичных для теории электромагнитных взаимодействий. Аналогично обстоит дело и с ролью структуры ранга (4,4;б) — она позволяет определить сильно взаимодействующие частицы — барионы и ввести группы преобразований, которые типичны для теории сильных взаимодействий. Однако заряды и взаимодействия как таковые возникнут только в теории следующей структуры — ранга (5,5;а).

1. Согласно общей теории бинарных структур закон структуры ранга (4,4;б) записывается в виде

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ a_{s\alpha} & a_{s\beta} & a_{s\gamma} & a_{s\delta} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.13.1)$$

где парные отношения определяются формулой

$$a_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3. \qquad (2.13.2)$$

Таким образом, каждый элемент характеризуется тремя комплексными параметрами. Для элементов множества $\mathfrak{M}$ (латинские

индексы) — это параметры i^1, i^2, i^3, а для элементов множества $\mathfrak{N}$ (греческие индексы) — это параметры $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$. Очевидно, что все параметры в этих тройках равноправны.

Выше уже отмечалось, что в теории каждой структуры ключевую роль играет фундаментальное $n \times n$–отношение максимального ранга. Здесь таковым является *фундаментальное* 3×3–отношение, которое представляется в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} i & k & j \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}; \quad (2.13.3)$$

Роль этого 3×3–отношения аналогична роли 2×2–отношения (2.1.3) в теории структуры ранга (3,3;б). Характерно, что оно также представляется в виде произведения двух определителей из однотипных параметров. Заметим, что это общее свойство всех бинарных структур типа б.

В теории этой структуры имеются также фундаментальные 2×2–отношения. Они представляются в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} i^2 & k^2 \\ i^3 & k^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i^3 & k^3 \\ i^1 & k^1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha^3 & \beta^3 \\ \alpha^1 & \beta^1 \end{vmatrix}. \quad (2.13.4)$$

2. В русле развиваемой здесь программы описания фундаментальных физических взаимодействий укажем ф и з и ч е с к у ю и н т е р п р е т а ц и ю введенных понятий и отношений. Для этого напомним, что в основе современной теории сильных взаимодействий (хромодинамики) лежат представления о кварковой структуре адронов, т.е. барионов и мезонов — сильно взаимодействующих частиц. В хромодинамике кварки q обладают тремя цветами (цветовыми зарядами), т.е. образуют цветовой триплет q^s (где $s = 1,2,3$). В теории структуры ранга (4,4;б) согласно (2.13.2) элементы также характеризуются тремя параметрами. Это дает основания *интерпретировать элементы структуры ранга* (4,4;б) *как кварки, а их параметры как три цветовых "заряда"*. При этом элементы множества $\mathfrak{M}$ будут характеризовать начальные состояния кварков, а элементы множества $\mathfrak{N}$ — конечные состояния.

В хромодинамике *барионы* (В) определяются в виде "бесцветной" тройной комбинации из компонент трех кварков

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \varepsilon_{srl} \cdot q_1^s \, q_2^r \, q_3^l \,, \tag{2.13.5}$$

где ε_{srl} — полностью антисимметричный символ Леви–Чивиты, его индексы пробегают три значения. Обращаясь к фундаментальному 3×3–отношению (2.13.3), легко убедиться, что каждое из двух слагаемых (определителей) с точностью до постоянного коэффициента соответствует определению (2.13.5):

$$B(i, k, j) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} , \tag{2.13.6}$$

где $q_1^s <=> i^s$, $q_2^s <=> k^s$, $q_3^s <=> j^s$, т.е. можно утверждать, что *фундаментальное 3×3–отношение соответствует амплитуде перехода свободного бариона из начального состояния в конечное.*

Чтобы охарактеризовать физический смысл фундаментального 2×2–отношения (2.13.4), заметим, что его можно представить в виде

$$2\begin{Bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{Bmatrix} = \left(\alpha^T \lambda(N) i\right) \left(\beta^T \lambda(N) k\right), \tag{2.13.7}$$

где $\lambda(N)$ девять трехрядных матриц, из которых восемь являются матрицами Гелл–Манна в стандартном представлении

$$\lambda(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda(2) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda(5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda(6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.13.8}$$

$$\lambda(7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \lambda(8) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

Девятой является матрица, кратная единичной: $\lambda(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot I_3$. В формуле (2.13.7) каждое из выражений в круглых скобках представляет собой своеобразный ток

$$\left(\alpha^T \lambda(N) i\right) = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \lambda(N) \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix}. \tag{2.13.9}$$

Суммирование производится по девяти значениям N как бы в девятимерном пространстве с сигнатурс (+ - - - - - - - - -). Заметим, что в теории структуры ранга (4,4;б) матрицы Гелл–Манна $\lambda(N)$ играют такую же роль, что и матрицы Паули $\sigma(i)$ в теории структуры ранга (3,3;б). В частности, в последней фундаментальное 2×2–отношение можно записать аналогичным образом

$$2\begin{bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = \left(\alpha^T \sigma(\mu) i\right)\left(\beta^T \sigma(\mu) k\right), \qquad (2.13.10)$$

где роль четвертой матрицы $\sigma(0)$ играет единичная матрица $\sigma(0) = I_2$.

В стандартной хромодинамике полагается, что кварки "склеены" внутри адронов переносчиками сильных взаимодействий — *глюонами*. С каждым из глюонов сопоставляется своя матрица Гелл–Манна, — так что всего их восемь. Глюоны связывают токи двух кварков аналогично тому, как это записано в (2.13.7). Поэтому можно сказать, что *фундаментальное* 2×2–*отношение* (2.13.4) без слагаемого с нулевыми компонентами $\left(\alpha^T \lambda(0) i\right)\left(\beta^T \lambda(0) k\right)$ характеризует выражения, описывающие взаимодействия двух кварков.

В связи с этим напомним, что в хромодинамике *мезоны* (М) строятся в виде "бесцветной" парной комбинации из компонент кварка и антикварка

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \bar{q}^s q^s = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\bar{q}^1 q^1 + \bar{q}^2 q^2 + \bar{q}^3 q^3). \qquad (2.13.11)$$

Легко видеть, что это выражение соответствует парным отношениям (2.13.2) структуры ранга (4,4;б) или "нулевой" компоненте 9–вектора $\left(\alpha^T \lambda(0) i\right)$.

3. Имеется много общего в теориях бинарных структур рангов (3,3;б) и (4,4;б) и в отношении возникающих в них групп преобразований параметров. Действительно, в теории структуры ранга (4.4;б) можно ввести некоторые преобразования из группы линейных преобразований

$$i^{s'} = A^s_{.k}\, i^k; \quad \overset{*}{\alpha}{}^{s'} = \overset{*}{A}{}^s_{.k} \overset{*}{\alpha}{}^k; \qquad (2.13.12)$$

где $A^s_{.k}$ и $\overset{*}{A}{}^s_{.k}$ — две девятки комплексно сопряженных коэффициентов. Эти формулы аналогичны (2.4.4). Рассмотрим специальные случаи преобразований, оставляющих инвариантными те или иные отношения структуры ранга (4,4;б).

а) Потребуем, чтобы преобразования (2.13.12) оставляли инвариантным каждый из определителей в (2.13.3). Это налагает на девять комплексных параметров одно комплексное условие

$$\begin{vmatrix} A^1_{.1} & A^1_{.2} & A^1_{.3} \\ A^2_{.1} & A^2_{.2} & A^2_{.3} \\ A^3_{.1} & A^3_{.2} & A^3_{.3} \end{vmatrix} = 1. \qquad (2.13.13)$$

Преобразования (2.13.12) с условием (2.13.13) образуют 16–параметрическую унимодулярную группу $SL(3,C)$, соответствующую 6–параметрической группе $SL(2,C)$ в теории структуры ранга (3,3;б).

б) Требование инвариантности парных отношений (2.13.2) приводит к 9–параметрической группе унитарных преобразований $U(3)$. Очевидно, что при преобразованиях $U(3)$ остаются инвариантными 2×2 и 3×3–отношения, однако в общем случае каждый из определителей справа в (2.13.3) инвариантным оставаться не будет.

в) Требование инвариантности парных отношений и каждого из определителей в (2.13.3) приводит к 8–параметрической группе унитарных унимодулярных преобразований $SU(3)$. Эту группу можно считать аналогом группы $SU(2)$ в теории структуры ранга (3,3;б). Напомним, что там преобразования $SU(2)$ соответствовали лишь пространственным вращениям в 4–мерном пространстве–времени.

Следует заметить, что группа $SU(3)$ играет ключевую роль в современной хромодинамике. Именно отталкиваясь от этой группы, производя ее локализацию, в рамках калибровочного подхода вводят глюоны и вообще сильные взаимодействия. Это является еще одним свидетельством того, что структура ранга (4,4;б) позволяет отразить ряд свойств современной теории сильных взаимодействий.

4. Дальнейшее развитие теории бинарных структур с целью описания хромодинамики возможно по двум принципиально различным каналам. П е р в ы й к а н а л *основан на понимании структуры ранга* (4,4;б) *(и последующих структур) как описывающей лишь так называемые внутренние симметрии элементарных частиц.* Для описания классических пространственно–временных отношений этих частиц тогда нужно опять использовать композицию структур (3,3;б) или (4,4;а) и (2,2). В итоге должна получаться своеобразная композиция уже трех структур: (2,2)×(3,3;б)×(4,4;б). Видимо, такой канал довольно хорошо соответствует общепринятой формулировке теории сильных взаимодействий, где 4–мерное классическое пространство–время рассматривается само по себе, а $SU(3)$ и другие симметрии относят к вспомогательному внутреннему пространству.

В т о р о й к а н а л *соответствует пониманию структуры ранга* (4,4;б) *и последующей (5,5;а) как универсальной структуры,*

содержащей в себе все те свойства, которые ранее были рассмотрены в теории структуры ранга (3,3;б). Для построения полной теории, содержащей в себе как теорию пространства–времени, так и теорию взаимодействий, в этом канале нужно рассматривать лишь композицию двух структур, например, структуры ранга (5,5;а) и ранга (2,2). В случае успеха этот канал можно было бы считать более экономным. Кроме того, на этом пути исследований можно надеяться вскрыть более тесно связанные закономерности электрослабых и сильных взаимодействий. В–третьих, такой подход более соответствует духу многомерных теорий Калуцы–Клейна, где вводится одно универсальное многомерное многообразие, и уже из него выделяются как классическое 4–мерное пространство–время, так и теории известных физических взаимодействий.

§ 2.14. Трехкомпонентные спиноры, девятимерные векторы и гипотеза о девятимерном пространстве–времени

Аналогия между теориями структур рангов (3,3;б) и (4,4;б) простирается настолько далеко, что невольно начинаешь ожидать проявления закономерностей структуры ранга (4,4;б) в физической реальности. Роль структуры ранга (3,3;б) в обосновании свойств классического пространства–времени была чрезвычайно важной. Что же следует ожидать от структуры ранга (4,4;б)? Здесь, конечно, подразумевается нечто большее, чем описание только внутренних симметрий сильных взаимодействий. Обсудим ряд ключевых обобщений понятий, ранее вводившихся в рамках структуры ранга (3,3;б).

1. *2–компонентные спиноры обобщаются на 3–компонентные.* Напомним, что у большинства физиков укоренилось мнение, что спиноры могут быть двух–, четырех–, восьми– и т.д.– компонентными, т.е. число компонент равно двум в некоторой целой степени. Менее распространены сведения о том, что число компонент таких спиноров и их свойства (вещественность, комплексность, ...) жестко связаны с размерностью и сигнатурой пространственно–временных многообразий, в которых они вводятся. Так, 3–мерному пространству соответствуют 2–компонентные спиноры, 4–мерному пространству Минковского — вещественные 4–компонентные, 5–мерному — комплексные 4–компонентные и т.д. Все это доказывается в рамках обычно используемого способа ввода спиноров через алгебры Клиффорда [48]. Однако теория бинарных структур открывает еще один способ ввода спиноров (или обобщенных спиноров), которые могут иметь любое число компонент.

Так, можно сказать, что элементы структуры ранга (4,4;б) описываются 3–компонентными спинорами. Для этого есть все основания. Действительно, мы имеем 3–мерное комплексное пространство, в котором определены линейные преобразования (2.13.12). Вместо привычного квадратичного скалярного произведения (2.5.1) теперь нужно говорить о кубичном скалярном произведении

$$(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}) = \varepsilon_{srl}\, i^s k^r j^l = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix}, \qquad (2.14.1)$$

где ε_{srl} — опять 3–индексный символ Леви–Чивиты, играющий роль антисимметричного спинорного метрического тензора в (2.5.1). Условием инвариантности этого скалярного произведения является соотношение (2.13.13), соответствующее спинорному условию (2.4.6). Следовательно, в 3–мерном спинорном пространстве (и сопряжен-

ном пространстве) имеет место 16–параметрическая группа преобразований $SL(3,C)$.

Пусть параметры элементов структуры соответствуют контравариантным спинорам i^s, k^s, f^s. С ними можно сопоставить по обычным правилам (с помощью символов Леви–Чивиты) ковариантные спинтензоры

$$i_{sr} = \varepsilon_{srl}\, i^l; \quad (ik)_s = \varepsilon_{srl}\, i^r k^l; \tag{2.14.2}$$

Отличие от случая 2–компонентных спиноров состоит в том, что с величинами с одним контравариантным индексом сопоставляются величины с двумя ковариантными, и наоборот.

По аналогии с 2–компонентными спинорами можно ввести понятие спинтензоров произвольного ранга

$$b^{sr\ldots\dot{k}\dot{l}\ldots} \sim i^s k^r \ldots \alpha^{\dot{k}} \beta^{\dot{l}} \ldots. \tag{2.14.3}$$

Очевидно, что в качестве сопряженных спиноров (обозначаемых индексами с точкой) выступают элементы второго множества бинарной структуры.

2. В главе 2 отмечалось, что важную роль в теории спиноров играет *смешанный спинтензор второго ранга* $b^{\dot{s}r}$. Определим его через три пары элементов структуры ранга (4,4;б)

$$b^{\dot{s}r} = i^s \alpha^r + k^s \beta^r + f^s \gamma^r. \tag{2.14.4}$$

Эта формула обобщает (2.5.1). В теории 3–компонентных спиноров спинтензорный инвариант определяется кубичным выражением

$$\frac{1}{6} \cdot \varepsilon_{slm} \varepsilon_{rpn} b^{sr} b^{lp} b^{mn} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \tag{2.14.5}$$

и совпадает с фундаментальным 3×3–отношением (2.13.3) структуры ранга (4,4;б). Это выражение обобщает формулу (2.5.3) в теории структуры ранга (3,3;б).

3. *Спинтензорному инварианту* (2.14.5), *т.е. фундаментальному* 3×3–*отношению можно сопоставить* 9–*мерное многообразие* аналогично тому, как в § 2.4 с инвариантом структуры ранга (3,3;б) сопоставлялось 4–мерное многообразие с сигнатурой (+ - - -). Для этого положим, что две тройки элементов находятся в парах, т.е.

$$i^s = (\alpha^s)^*; \quad k^s = (\beta^s)^*; \quad f^s = (\gamma^s)^*. \tag{2.14.6}$$

Тогда матрица из элемнтов β^{sr} становится эрмитовой и ее можно представить в виде

$$\left\{b^{sr}\right\} = \lambda^N p_N, \tag{2.14.7}$$

где λ^N — матрицы, записанные в (2.13.8). Коэффициенты p_N образуют вещественный 9–мерный вектор, преобразующийся по векторному представлению группы $SL(3,C)$).

Инвариант (2.14.5) записывается в виде кубичной формы из компонент вектора p_N

$$\begin{Bmatrix} i & k & j \\ \alpha & \beta & \gamma \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} p_0+p_3+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot p_8 & p_1-ip_2 & p_4-ip_5 \\ p_1+ip_2 & p_0-p_3+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot p_8 & p_6-ip_7 \\ p_4+ip_5 & p_6+ip_7 & p_0-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot p_8 \end{vmatrix} = \tag{2.14.8}$$

$$= p_0(p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2-p_4^2-p_5^2-p_6^2-p_7^2-p_8^2) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot p_8(2p_1^2+2p_2^2+2p_3^2-p_4^2-p_5^2-p_6^2-p_7^2-\frac{2}{3}p_8^2) + p_3(p_4^2+p_5^2-p_6^2-p_7^2) +$$

$$+ 2(p_1p_4p_6+p_1p_5p_7+p_2p_5p_6-p_2p_4p_7) \equiv G^{ABC}p_Ap_Bp_C\,,$$

где G^{ABC} можно рассматривать как метрический тензор третьего ранга, определяющий кубичную метрику в 9–мерном многообразии. Это выражение обобщает определение квадратичной метрики в (2.5.6).

Дальнейшие аналоги и обобщения 4-мерных понятий в рамках теории структуры ранга (4,4;б) только назовем.

4. *Вводится* 6–*компонентный биспинор*, определяемый столбцом из трех контравариантных компонент спинора и трех ковариантных (парных) спинтензорных компонент.

5. Из 6–компонентных биспиноров и 6–рядных матриц Λ^N, образованных из матриц Гелл–Манна по аналогии с матрицами Дирака γ^μ, *строятся компоненты* 9–*мерных векторов* и другие величины.

6. *Определяются преобразования в* 9–*мерном* (импульсном) *пространстве* , являющиеся представлением группы $SL(3,C)$ и обобщающие известные преобразования Лоренца в 4–мерии.

7. Из группы таких преобразований *выделяются* 8–*параметрическая подгруппа, являющаяся представлением группы* $SU(3)$. Ее следует рассматривать как аналог подгруппы пространственных вращений в классическом пространстве–времени. Эта подгруппа допол-

няется до полной 16–параметрической группы 8–параметрическим семейством преобразований, соответствующих бустам в 4–мерном пространстве–времени.

8. По аналогии с тем, как это было сделано в § 2.5, *можно ввести прообраз уравнения Дирака в 9–мерном импульсном пространстве.*

Можно ввести и ряд других понятий, а также ставить вопрос о композиции структуры ранга (4,4;б) со структурой ранга (2,2), т.е. обсуждать вопрос о переходе от 9–мерного импульсного пространства к некоему аналогу координатного пространства–времени.

Следует заметить, что вводимое таким образом 9–мерное пространство имеет и существенные отличия от случая 4–мерия. Ряд из них очевиден из изложенного. Отметим, что вводимые описанным выше образом преобразования не охватывают всей группы преобразований 0(1,8) в 9–мерном пространстве, как это имеет место в 4–мерной теории. В этом смысле 9–мерная теория является "ущербной".

Возникает соблазн попытаться интерпретировать через понятия структуры ранга (4,4;б) (и прообраза 9–мерного прострaства) не только ранее указанные элементы хромодинамики, но и ряд других физических понятий. Так, известно, что элементарные частицы (фермионы) образуют *три поколения.* Самые распространенные частицы окружающего нас мира — электроны, протоны, нейтроны — принадлежат к первому поколению. До сих пор нет общепризнанного теоретического объяснения наличия именно трех поколений. С другой стороны, из 9–мерного пространства, о котором выше шла речь, можно выделить 4–мерное подпространство с сигнатурой (+ - - -). Более того, это 9–мерное пространство можно мыслить как совокупность трех пересекающихся 4–мерных подпространств. Это легко можно усмотреть из представления матриц Гелл–Манна в (2.13.8). *Выскажем гипотезу о том, что три поколения частиц обусловлены тремя возможными способами выделения из 9–мерия четырехмерных подпространств.* Может быть, в реальном мире оказалась выделенной одна из этих возможностей, т.е. один из трех возможных наборов структур ранга (3,3;б)? Тогда соответствующие этой структуре частицы образуют первое поколение. Конечно, эти соображения соответствуют второму из названных выше каналов развития бинарной геометрофизики.

С этой гипотезой связано множество вопросов самого разнообразного характера. Одним из наиболее любопытных является вопрос: Почему композиция структуры ранга (2,2) осуществилась со структурой ранга (3,3;б) (точнее — ранга (4,4;а)), а не с более общей структурой ранга (4,4;б) (или с (5,5;а))?

§ 2.15. Структура ранга (5,5;а) и программа великого объединения физических взаимодействий

Бинарные структуры типа "б" являются лишь прелюдией для построения теорий взаимодействий соответствующих частиц. Именно так обстояло дело в случае структуры ранга (3,3;б), в рамках которой были определены лептоны и введены группы преобразований $SL(2,C)$ и $SU(2)$, а электрослабые взаимодействия между лептонами описывались структурой ранга (4,4;а). Аналогично в рамках структуры ранга (4,4;б) определены адроны и группы $SL(3,C)$ и $SU(3)$, а электрослабые взаимодействия между адронами и лептонами должны описываться структурой ранга (5,5;а).

Имея это в виду, можно утверждать, что *в рамках структуры ранга* (5,5;а) *получается теория, которую следует трактовать как объединенную модель сильных и электрослабых взаимодействий.*

Качественно это можно пояснить на примере барионов. Они образуются из трех кварков, на нашем языке, — из трех элементов структуры ранга (5,5;а). Последние же характеризуются не только тройкой цветовых компонент, но и дополнительным четвертым параметром i_0 (или α_0). Как и в случае структуры ранга (4,4;а), эти параметры соответствуют неким зарядам. Из зарядовых параметров бариона можно построить заряды электрослабых взаимодействий.

Напомним, что в современной физике элементарных частиц важнейшей является проблема построения теории великого объединения, т.е. теории, объединяющей известные закономерности гравитационного, электрослабого и сильного взаимодействий. Как мы видим, теория структуры ранга (5,5;а) позволяет выйти на решение этой проблемы, причем путем, принципиально отличающимся от обсуждающихся в современной мировой литературе. Детальное обсуждение такой теоретической модели выходит за рамки этой книги. Здесь мы только обрисуем ключевые понятия теории бинарной структуры ранга (5,5;а) и укажем их роль в физической теории.

В согласии с ранее изложенным закон бинарной структуры ранга (5.5;а) имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} & a_{i\varepsilon} \\ 1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} & a_{k\varepsilon} \\ 1 & a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} & a_{j\varepsilon} \\ 1 & a_{s\alpha} & a_{s\beta} & a_{s\gamma} & a_{s\delta} & a_{s\varepsilon} \\ 1 & a_{r\alpha} & a_{r\beta} & a_{r\gamma} & a_{r\delta} & a_{r\varepsilon} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.15.1)$$

где парные отношения определяются формулой

$$a_{i\alpha} = i^1\alpha^1 + i^2\alpha^2 + i^3\alpha^3 + i_0 + \alpha_0, \qquad (2.15.2)$$

т.е. каждый элемент структуры характеризуется четырьмя параметрами: i^1, i^2, i^3, i^0(или $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha_0$). Здесь i_0 и α_0 — дополнительные зарядовые параметры, упомянутые выше.

Ключевую роль в теории этой структуры опять играет фундаментальное $n\times n$–отношение максимального ранга, т.е. 5×5–отношение

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} & a_{i\varepsilon} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} & a_{k\varepsilon} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} & a_{j\varepsilon} \\ a_{s\alpha} & a_{s\beta} & a_{s\gamma} & a_{s\delta} & a_{s\varepsilon} \\ a_{r\alpha} & a_{r\beta} & a_{r\gamma} & a_{r\delta} & a_{r\varepsilon} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\text{слагаемых} \\ \text{типа}}} \begin{pmatrix} i & s \\ \alpha & \delta \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} k & j & r \\ \beta & \gamma & \varepsilon \end{bmatrix} \qquad (2.15.3)$$

Здесь справа стоит сумма из 100 комбинаций, отличающихся перестановками двух пятерок индексов. Каждая комбинация является произведением двух слагаемых: 3×3–отношения $\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}$ из цветовых параметров, характерного для структуры ранга (4,4;б) (см. (2.13.3)), и 2×2–отношения $\begin{pmatrix} \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \end{pmatrix}$ из дополнительных (зарядовых) параметров (см. (2.9.3)). Очевидно, что каждая из этих комбинаций инвариантна относительно групп преобразований $SL(3,C)$ и $SU^c(3)$.

Фундаментальное 5×5–отношение можно физически интерпретировать как выражение, описывающее взаимодействие бариона с мезоном или с лептоном. Взаимодействие может быть как сильным, так и электрослабым. Это графически пояснено на рисунке 25, где барион изображен тройной линией, а мезон или лептон — двойной.

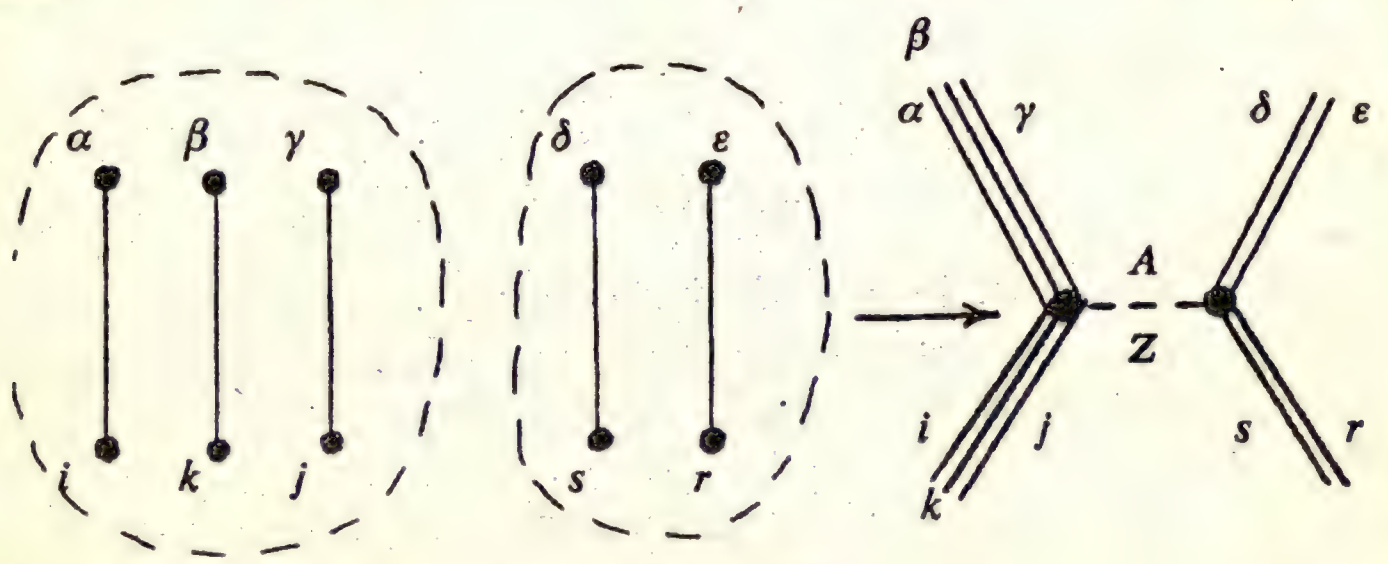


Рис.25.

Напомним один из сформулированных ранее принципов, гласящий, что каждому фундаментальному $n\times n$–отношению максимального ранга соответствует некоторое связанное состояние. Таким *связанным состоянием в случае структуры ранга* (5,5;а) *является атом водорода* — электромагнитным образом связанные протон и электрон. Легко показать, что атом водорода описывается комбинациями, в которых скалярные 2×2–отношения содержат по две пары противоположных элементов от двух разных частиц.

В теории структуры ранга (5,5;а) имеются также фундаментальные 4×4–, 3×3– и 2×2–отношения. Фундаментальные 4×4–отношения инвариантны относительно преобразований группы $SU(3)$ и характеризуются двумя совокупностями комбинаций. Одна состоит из слагаемых типа $v_{i\alpha}\begin{bmatrix} k & j & s \\ \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}$, а вторая — из 36 слагаемых типа $\begin{Bmatrix} ik \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} js \\ \gamma\delta \end{pmatrix}$, где $\begin{Bmatrix} ik \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}$образованы цветовыми параметрами согласно (2.13.4), а $\begin{pmatrix} js \\ \gamma\delta \end{pmatrix}$ состоят из дополнительных параметров. Такие 4×4–отношения можно физически интерпретировать как описывающие взаимодействия либо между мезонами и массивными лептонами трех поколений (вторая совокупность слагаемых), либо между барионами и нейтрино (см. рис. 26).

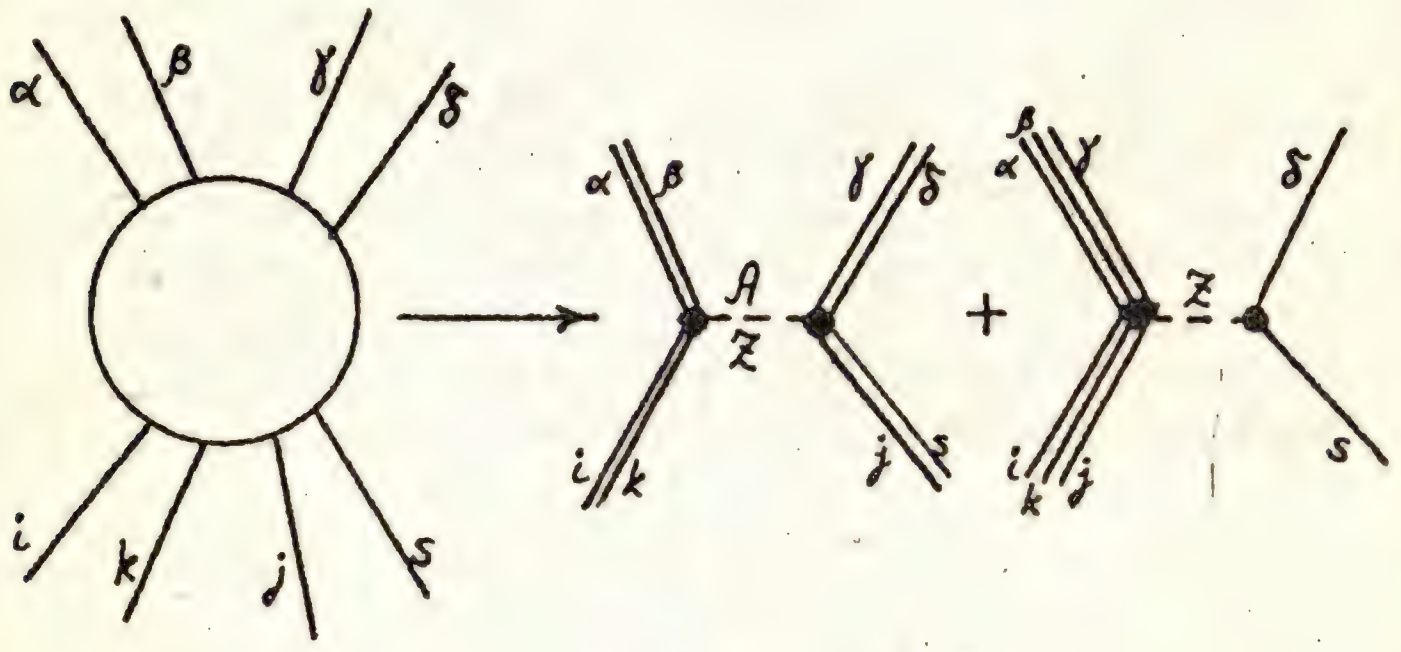


Рис. 26.

Фундаментальные 3×3– и 2×2–отношения можно физически интерпретировать так же, как и в § 2.11, где обсуждалась структура ранга (4,4;а), с той лишь разницей, что под парными линиями можно понимать мезоны.

Лишний раз подчеркнем, что здесь пока речь шла лишь о закономерностях в импульсном пространстве. Для перехода к координатному пространству–времени опять нужно произвести композицию

двух бинарных структур рангов (5,5;а) и (2,2). Кроме того, отметим, что изложенные здесь соображения сделаны в рамках второго из названных выше каналов развития теории физических взаимодействий. На этом пути существенными являются вопросы извлечения понятий 2–компонентных спиноров и 4–компонентных векторов из понятий структуры ранга (5,5;а).

Наконец, возникает естественный вопрос: Что следует ожидать дальше? Наш подход позволяет обсуждать как теории физических структур более высокого ранга, так и их возможные физические следствия. Пока не видно запретов для таких обобщений. Методика развития таких теорий в общих чертах ясна. В рамках структуры ранга (5,5;б) возникнут группы преобразований $SL(4,C)$ и $SU(4)$. Появится возможность говорить о частицах, образованных из четверки элементов структуры ранга (5,5;б), что позволит ввести еще один тип физических взаимодействий — "сверхсильных", пока еще всерьез не обсуждавшихся в физике элементарных частиц. Эту схему рассуждений можно продлить и далее... Видимо, мы пока не располагаем экспериментальными данными, которые надежно можно было бы интерпретировать понятиями теорий такого рода. С другой стороны, не исключено, что будут найдены некие принципы, позволяющие на каком–то этапе обрезать иерархию используемых для физических целей бинарных структур. А может быть, на каком–то этапе развития бинарной геометрофизики вообще потеряют силу логические основания такого рода для дальнейшего наращивания данной конструкции.

ГЛАВА 2.5

МЕСТО БИНАРНОЙ ГЕОМЕТРОФИЗИКИ СРЕДИ ДРУГИХ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ И ПРОГРАММ

В этой части книги назывались теории, некоторые идеи которых были использованы в изложенной здесь бинарной геометрофизике. Это многомерные теории Калуцы–Клейна, теория прямого межчастичного взаимодействия и некоторые другие. Однако данный подход существенно отличается от каждой из них. Постараемся охарактеризовать место наших исследований среди других физических теорий и программ. На наш взгляд, развитую здесь теоретическую конструкцию на базе бинарных структур правильнее было бы отнести к разряду *физических парадигм*, поскольку здесь речь шла о новой совокупности принципов и концепций, положенных в основу физики. Поэтому сравнение бинарной геометрофизики нужно производить не с отдельными теориями, а с известными другими физическими парадигмами или программами. В рамках каждой из таких парадигм, как правило, имеется набор однотипных по духу физических теорий.

Предлагается определить и классифицировать имеющиеся в фундаментальной теоретической физике парадигмы по характеру отношения к сути *трех физических категорий* [49]: 1) *пространство–время*, 2) *частицы* (на квантовом уровне — фермионы), 3) *поля переносчиков взаимодействий* (бозоны). Именно эти три категории являются ключевыми в современной физической картине мира. Это подчеркивалось в высказываниях ряда известных физиков–теоретиков. Так, в статье Ч.Мизнера и Дж.Уилера "Классическая физика как геометрия" [50, с.218] указывалось: "Имеются две прямо противоположные точки зрения на сущность физики:

1) пространственно–временной континуум служит лишь ареной проявления полей и частиц. Эти последние сущности чужды геометрии. Их следует добавить к геометрии для того, чтобы вообще можно было говорить о какой–либо физике;

2) в мире нет ничего, кроме пустого искривленного пространства. Материя, заряд, электромагнетизм и другие поля являются лишь проявлением искривления пространства. *Физика есть геометрия*".

В этом высказывании выделены две физические категории: 1) пространство–время (искривленное) и 2) поля и частицы, — и названы две точки зрения (два суждения) относительно первичности этих категорий. Школа Уилера придерживается второй точки зре-

ния. Наш подход не укладывается ни в одну из этих двух точек зрения. У нас нет среди первичных поня ий ни пустого искривленного пространства, ни пространства–времени как арены проявления материи.

Заметим, что точка зрения Уилера, разделяемая многими другими авторами, была четко сформулирована более ста лет назад В.Клиффордом, который писал: "Не окажется ли, что все или некоторые из тех причин, которые мы называем физическими, свое начало ведут от геометрического строения нашего пространства?" [39, с.46]. Альтернативной точки зрения придерживался Эрнст Мах. В книге "Механика" он выступал против взглядов Ньютона на пространство и время как на абсолютные понятия. Мах писал: "В отношении физическом *время и пространство* суть особые зависимости физических элементов *друг от друга*" [51, с.432]. Если здесь под зависимостями понимать отношения структур, то можно утверждать, что наш подход более всего соответствует взглядам Маха.

Далее оказалось, что понятия частиц и полей нужно разделить. Появился поток работ по теории прямого межчастичного взаимодействия, в которых отсутствовали поля как первичные понятия. Теории разделились на близкодействующие (теория поля) и дальнодействующие. Наш подход принадлежит к классу последних.

Если согласиться с ключевым характером трех указанных физических категорий и попытаться построить новую физическую теорию, опирающуюся на меньшее число категорий, то вырисовываются три возможности. Первая состоит в том,что в основу теории кладутся две из трех категорий, а третья должна рассматриваться как вторичная (производная из первых двух [49]). Физические программы — парадигмы такого типа назовем *генерирующими*. Вторая возможность состоит в том, что две из физических категорий объединяются в некую одну обобщенную, тогда как третья остается отдельной независимой. Такие парадигмы назовем *объединительными*. Наконец, программы, основанные на некой только одной обобщенной категории, назовем *одинарными* парадигмами. Имея в виду, что эти три возможности касаются трех физических категорий, перебирая все комбинации, приходим к девяти экономным физическим парадигмам. Добавим сюда общепринятую парадигму, опирающуюся на три физические категории как самостоятельные (первичные). В итоге получаем десять основных физических парадигм, которые изображены на рисунке 27.

Для изображения всех десяти парадигм использованы кружки и овалы, соответствующие трем физическим категориям в отдельности или объединенным в пары. Внутри кружков проставлены символы: П–В — пространство–время, Ч — частицы, П — поля. Сплошные

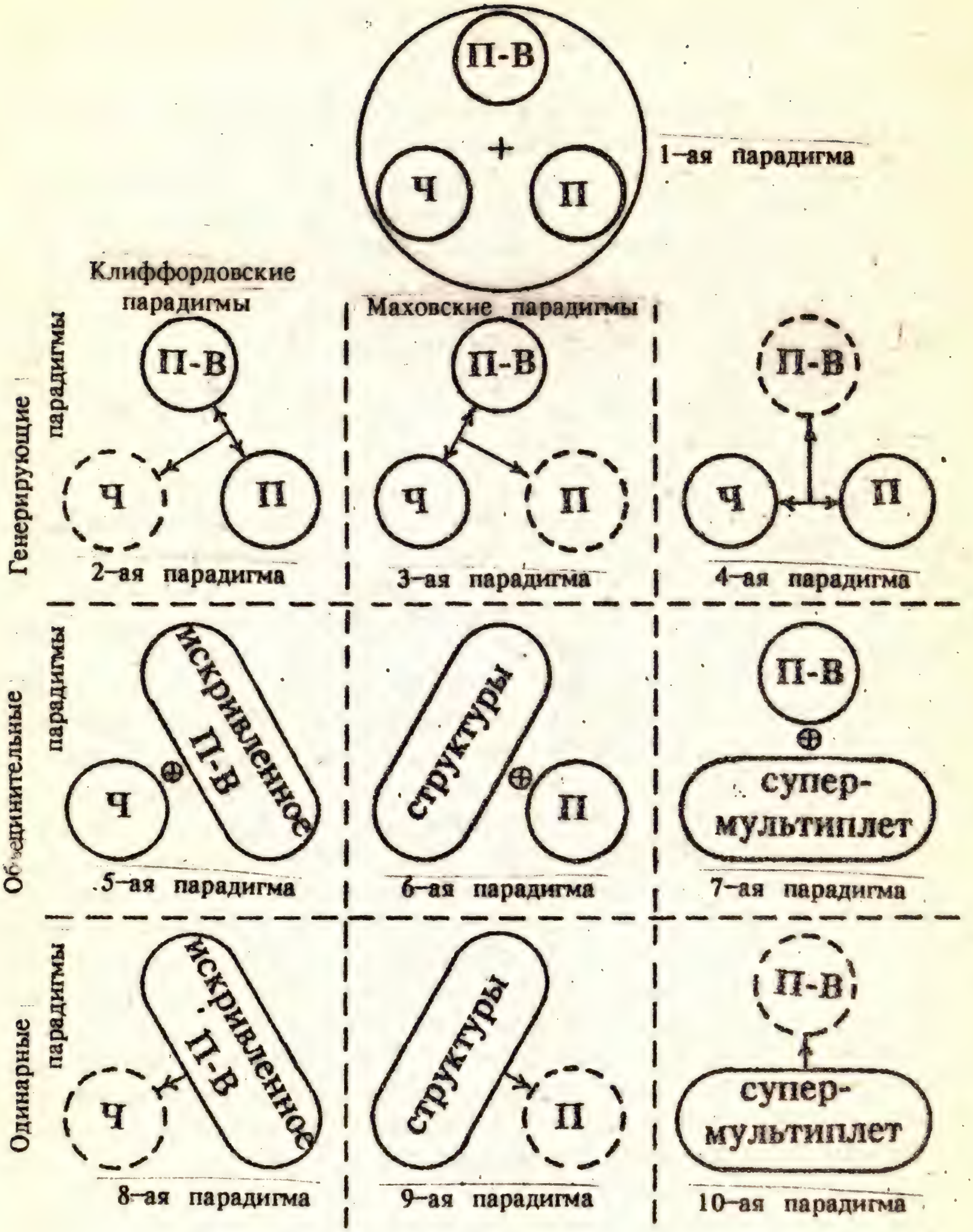

П-В
+
Ч
П
1–ая парадигма
Клиффордовские парадигмы
Маховские парадигмы
Генерирующие парадигмы
П-В
Ч
П
2–ая парадигма
3–ая парадигма
4–ая парадигма
Объединительные парадигмы
искривленное П-В
структуры
супер-мультиплет
5–ая парадигма
6–ая парадигма
7–ая парадигма
Одинарные парадигмы
8–ая парадигма
9–ая парадигма
10–ая парадигма

Рис. 27.

кружки и овалы означают, что соответствующие категории используются в качестве базисных (первичных), тогда как пунктирные кружки означают вторичность(производность) категорий. Девять "экономных" парадигм разделены по вертикали на три класса: 2–я, 5–я и 8–я парадигмы названы *клиффордовскими*, поскольку в них целиком или частично предполагается осуществление программы Клиффорда. Три парадигмы второго столбца (3–ю, 6–ю и 9–ю) предлагается назвать *маховскими*, поскольку во всех них пространство–время и поля имеют реляционный характер. Третьему столбцу затруднительно дать какое–либо именное название.

Наш подход в корне отличается от клиффордовских парадигм. Тем не менее охарактеризуем их. Экстремально клиффордовская программа, которую пытался осуществить Уилер в своей геометродинамике, относится к восьмой парадигме. В ней категории полей и пространства–времени объединены в одну обобщенную категорию искривленного пространства–времени. Аналогичная обобщенная категория использована и в 5–й парадигме. Наиболее известным примером теории из пятой парадигмы является эйнштейновская общая теории относительности. В ней гравитационное поле описывается метрикой 4–мерного искривленного пространства–времени. При этом частицы (фермионы), а также другие поля добавляются в правую часть уравнений Эйнштейна. Другим примером теорий из пятой парадигмы являются многомерные геометрические модели физических взаимодействий типа теории Калуцы–Клейна. В них геометризуются бозонные поля, однако фермионы вносятся в теорию отдельно. Идеи этой теории использованы в нашем подходе, однако концептуально такие теории совершенно иного типа. Ко второй парадигме относятся теории, в которых ищутся частицеподобные решения полевых уравнений (солитонные и другие решения).

Наша *бинарная геометрофизика должна быть отнесена ко второму столбцу — к маховским парадигмам.* В этой колонке примером теории из третьей парадигмы является многократно упоминавшаяся здесь теория прямого межчастичного взаимодействия. Заметим, что имеется множество вариантов теории прямого взаимодействия [7]. Мы опирались на вариант Фоккера–Фейнмана. В таких теориях за первичные физические категории принимаются фоновое пространство–время (обычно плоское, но можно взять и искривленное) и частицы. Поля строятся из характеристик взаимодействующих частиц. Эта идея была использована в нашем подходе, однако бинарная геометрофизика существенно отличается и от теорий этой парадигмы.

Во–первых, в теориях прямого межчастичного взаимодействия свойства классического пространства–времени и само оно постули-

руются изначально вне зависимости от частиц. В нашем подходе классическое пространство–время выводилось из более первичных отношений между элементами (частицами). Во–вторых, из стандартной теории прямого межчастичного взаимодействия никак не следует спинорный характер частиц. В нашем же подходе фермионность частиц получается автоматически. В–третьих, в теории Фоккера–Фейнмана взаимодействия можно различать лишь по тензорному признаку: векторные, тензорные, скалярные взаимодействия. Из теории напрямую не следует возможность различать несколько, допустим, векторных типов взаимодействий. В бинарной геометрофизике для этого имеются новые возможности, связанные с рангом бинарной структуры.

В–четвертых, и это самое главное, в теориях прямого межчастичного взаимодействия категории пространства–времени и частиц в значительной степени самостоятельны. Их явно две. В нашем же подходе вместо двух отдельных категорий используется одна обобщенная категория бинарной физической структуры. В ней невозможно говорить об отношениях без элементов, так же как бессмысленно обсуждать элементы без отношений между ними. Другими словами, структура объединяет две категории в одну обобщенную, аналогично тому, как искривленное пространство–время включает в себя категории просранства–времени и гравитационного поля в общей теории относительности (и других полей в теориях Калуцы-Клейна). Все это позволяет утверждать, что бинарная геометрофизика должна быть отнесена к новой, девятой парадигме. Указанные в § 2.13 этой части книги два канала исследований могли бы составить две разновидности теории этой парадигмы.

На рисунке 27 изображена шестая парадигма, которая также опирается на структуры. Теории такого типа ожидались нами на предварительном этапе исследований теории физических структур, когда еще не был ясен механизм введения взаимодействий в ее рамках.

Наконец, в третью колонку парадигм попадают физические программы, находящиеся на совершенно различных стадиях своего развития. Про десятую парадигму пока вообще нельзя сказать ничего определенного — она изображена на рисунке для полноты картины. К седьмой парадигме относятся очень модные ныне исследования по теориям суперсимметрий, супергравитации и суперструнам. Их основная идея состоит в том, что фермионы и бозоны объединяются в единый супермультиплет, между компонентами которого имеются специальные преобразования, перемешивающие их. Это означает, что категории частиц (фермионов) и полей (бозонов) объединяются в обобщенную категорию. (Опять вспомним аналогичные объединения в виде искривленного пространства–времени или в виде струк-

туры). Этот супермультиплет помещается в суперпространство, т.е. в 4–мерное пространство–время, обогащенное грассмановыми антикоммутирующими переменными.

По своей сути суперсимметричные теории относятся к типичным теориям поля, т.е. концептуально отличаются от бинарой геометрофизики. Эти теории роднит с нашим подходом то, что в них во главу угла поставлен вопрос о соотношении фермионов и бозонов, однако он решается принципиально иначе, чем в бинарной геометрофизике. В суперсимметричных теориях грассмановы переменные добавляются к классическим координатам волевым образом, что и позволяет объединить бозоны и фермионы. В нашем же подходе фермионный характер частиц обусловлен бинарной структурой и лежит в основе всей теоретической конструкции. Бозонные же понятия имеют составной, вторичный характер.

К недостаткам теорий седьмой парадигмы следует отнести то, что в них фактически не ставится вопрос об обосновании свойств классического 4–мерного пространства–времени. Оно предполагается изначально заданным. В нашем же подходе решение этого вопроса составляет важную часть всей теории.

В рамках четвертой парадигмы предполагается вывести понятие классического пространства–времени из двух других физических категорий. На желательность построения такой теории обращали внимание многие известные физики–теоретики: А.Эддингтон, Д.Ван Данциг, Е.Циммерман и другие. Однако пока можно говорить лишь об отдельных фрагментах такой теории; более или менее развитой теоретической конструкции такого рода пока никем не предложено.

Резюмируя изложенное, можно утверждать, что развитая здесь на базе иерархии бинарных физических структур теория относится к новой, девятой физической парадигме маховского типа. Она вобрала в себя ряд черт из физических теорий других парадигм, главным образом, теории прямого межчастичного взаимодействия (3–я парадигма) и многомерных единых геометрических моделей типа теории Калуцы–Клейна (5–я парадигма). Данное исследование нацелено на решение ряда фундаментальных проблем современной теоретической физики. Среди них важное место занимает проблема объединения теорий физических взаимодействий, интенсивно разрабатываемая ныне в рамках первой, пятой и седьмой парадигм.

ЧАСТЬ 3

ФЕЙНМАНОВСКИЙ МЕТОД КВАНТОВАНИЯ И БИНАРНАЯ ГЕОМЕТРОФИЗИКА

ГЛАВА 3.1

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ

§ 3.1. Бинарная геометрофизика и фейнмановские методы в электродинамике

В современной квантовой теории поля широко используется фейнмановский метод континуального интегрирования по траекториям. При этом, как правило, к фейнмановскому квантованию относятся лишь как к методу, т.е. как к техническому приему, забывая, что этот метод возник и автором предназначался для реализации вполне определенных идеологических установок — в рамках третьей парадигмы по классификации, данной в предыдущей части. В этой части книги предлагается вернуться к изначальному предназначению фейнмановского подхода и указывается, как его следует обобщить для квантования частиц полуцелого спина. Цель этой части книги состоит в том, чтобы, с одной стороны, продемонстрировать еще один путь, естественным образом приводящий к применению теории физических структур в физике (точнее, к программе бинарной геометрофизики), и, с другой стороны, разработать необходимое звено для перехода от принципов бинарной геометрофизики к стандартным уравнениям и понятиям физики в классическом пространстве–времени.

В предыдущей части книги было показано, что бинарная геометрофизика принадлежит к той же колонке физических парадигм, что и теория прямого межчастичного взаимодействия (ТПМЧВ), в развитие которой большой вклад внес Р.Фейнман. Оказалось, что идеи, которыми руководствовался Фейнман в своих работах по квантовой электродинамике, созвучны принципам, заложенным в основу как теории физических структур, так и бинарной геометрофизики. Это можно усмотреть в ряде ключевых положений фейнмановского подхода к электродинамике.

Во–первых, это относится к пониманию взаимодействия как отношения непосредственно между частицами, когда категория поля устраняется из числа независимых первичных понятий. Так, в своей Нобелевской лекции Фейнман сказал: "Поэтому для себя я решил, что электрон не может взаимодействовать с самим собой, а может взаимодействовать только с другими электронами. Но это значит, что никакого поля вообще нет ... Заряды непосредственно взаимодействуют друг с другом, хотя и с некоторым запаздыванием" [52, с.195]. Это высказывание находится в полном соответствии с описанием электромагнитных взаимодействий в рамках структуры ранга (4,4;а), изложенным в предыдущей части этой книги.

Следует напомнить, что именно Р.Фейнману (и Дж.Уилеру) принадлежит решение проблемы устранения опережающих взаимодействий в ТПМЧВ путем учета вкладов во взаимодействие любой пары частиц со стороны всех окружающих зарядов мира. Эти результаты составили так называемую фейнмановскую теорию поглотителя, являющуюся составной частью ТПМЧВ. После работ Фейнмана и Уилера электродинамика в рамках концепции дальнодействия по своим выводам стала эквивалентной стандартной теории электромагнитного поля.

Во–вторых, Фейнману принадлежит третья (после шредингеровской и гейзенберговской) формулировка квантовой механики, оказавшаяся необходимой при композиции структур рангов (2,2) и (4,4;а). Напомним, как Фейнман пришел к этой формулировке. Для окончательного заключения о возможности построения целостной физической картины мира на основе теории прямого межчастичного взаимодействия необходимо было показать, что имеется и ее квантовый вариант, пригодный для объяснения квантовых эффектов. Такой вариант специально для этой цели и был развит Фейнманом. По этому поводу он писал: "Теорию электромагнетизма, развитую Уилером и Фейнманом, ... можно сформулировать в виде принципа наименьшего действия, содержащего только координаты частиц. Именно попытка проквантовать эту теорию, не обращаясь к представле-

нию о поле, привела автора к изложенной здесь формулировке квантовой механики" [43, с.202].

В–третьих, существенно то, что в фейнмановской формулировке квантовой механики во главу угла поставлено понятие классического действия S. Это очень важно для развития бинарной геометрофизики, в которой, как указывалось, более первичными оказываются понятия действия (из структуры ранга (2,2)) и 4–импульса p_μ (из структуры ранга (3,3;б)). Понятия координатного пространства–времени оказываются производными, вторичными. В своей Нобелевской лекции Фейнман рассказал, как он искал формулировку "метода квантования, отправляющегося от действия", и как ему в этом помогли работы П.Дирака. Он сказал: "... зависимость между волновой функцией в один момент времени и волновой функцией через конечный промежуток времени можно получить посредством бесконечного (из–за того, что $\varepsilon \to 0$) числа интегралов от экспоненты $E^{iS/\hbar}$, где S — действие, соответствующее формуле (2). Наконец–то мне удалось найти основное выражение для квантовой механики, в которое входило непосредственно действие S .... Таким образом, появился новый, третий способ описания квантовой механики, который внешне ничем не напоминал форулировки Шредингера или Гейзенберга, но был им полностью эквивалентен" [52, с.213].

В–четвертых, как нельзя кстати оказалась и сама фейнмановская методика подсчета амплитуд перехода частицы из одного состояния в другое. Она состоит в разбиении конечного промежутка времени t на малые интервалы ε и в суммировании по всем возможным переходам частицы между точками за этот малый интервал времени. В рамках бинарной геометрофизики это соответствует одному шагу, описываемому структурой ранга (3,3;б) или ранга (4,4;б). Отличие от фейнмановского метода состоит в том, что у него все моменты времени равноправны, а в бинарной геометрофизике при композиции структур все моменты разбиваются на два класса моментов, т.е. на чередующиеся четные и нечетные моменты. Как уже упоминалось во второй части книги, эта специфика связана со спинорностью частиц. Подчеркнем, что в работах Фейнмана описывались лишь скалярные частицы.

Перечисление точек соприкосновения фейнмановских взглядов и принципов бинарной геометрофизики можно было бы продолжить. Несомненно, было бы чрезвычайно важно обсудить теорию физических структур и бинарную геометрофизику непосредственно с Фейнманом. Летом 1987 года Фейнман намеревался посетить Туву. Ю.И.Кулаков с сотрудниками планировал с ним встретиться и познакомить его с теорией физических структур. Около месяца они про-

ждали Фейнмана в Кызыле, но визит по ряду причин не состоялся. А вскоре Фейнмана не стало...

В этой части книги обсуждена связь фейнмановского метода квантования с бинарной геометрофизикой. В следующих трех параграфах напоминаются основные идеи и результаты фейнмановского квантования, сначала для нерелятивистского случая, затем обсуждены проблемы перехода к релятивистской квантовой теории. Из них следует выделить две основные. Это, во-первых, как перейти от абсолютного ньютоновского времени ко времени специальной теории относительности. Этот вопрос обсуждается в § 3.3. Во-вторых, это проблема перехода от скалярных частиц к фермионам (см. 3.4). В рамках стандартного подхода решение этих проблем представляет собой далеко не тривиальную задачу. В § 3.5 предлагается новый способ решения этих двух проблем с помощью специального динамического принципа. Затем показывается, что этот динамический принцип можно интерпретировать как композицию двух бинарных структур рангов (2,2) и (3,3;б) (или (4,4;а) в случае электромагнитно взаимодействующих частиц). Наконец, в последнем параграфе указано, как конкретно в такой теории вводится электромагнитное взаимодействие фермионов, соответствующее стандартной электродинамике. В приложении указана возможная связь бинарной геометрофизики (девятой парадигмы) с программами, намеченными в рамках четвертой физической парадигмы.

§ 3.2. Метод интегрирования по траекториям в квантовой механике

Ключевым понятием в фейнмановском подходе является пропагатор, выражающий амплитуду вероятности перехода частицы из одной точки пространства-времени в другую. В нерелятивистской квантовой механике для инфинитезимально малых интервалов времени пропагатор перехода частицы из точки x_1 в точку x_2 постулируется в виде:

$$K(x_2, x_1) = \frac{1}{N} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mc}{2}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{c}U\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right)\varepsilon\right\}, \quad (3.2.1)$$

где N — некоторая константа, определяемая условием нормировки, $U(x)$ — члены, описывающие взаимодействие.

Вторым существенным постулатом является предположение о суперпозиции амплитуд вероятности

$$K(x_3, x_1) = \sum_{\{x_2\}} K(x_3, x_2)K(x_2, x_1) = \int_{\infty} \frac{dx_2}{N_x} \cdot K(x_3, x_2)K(x_2, x_1). \quad (3.2.2)$$

Суммирование в (1.2.2) выполняется по всем возможным промежуточным точкам x_2. Поскольку каждый из переходов, в свою очередь, может быть представлен как суперпозиция переходов через соответствующие промежуточные точки, то пропагатор перехода между двумя произвольными точками

пространства–времени x_1 и x_n будет выражаться следующим образом:

$$K(x_n, x_1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\infty} \frac{dx_{n-1}}{N_x} K(x_n, x_{n-1}) \ldots \int_{\infty} \frac{dx_2}{N_x} K(x_3, x_2) K(x_2, x_1), \quad (3.2.3)$$

где точки x_i и x_{i-1} разделены инфинитезимально малыми интервалами времени (см. рис. 3.). Обозначив:

$$D\left[x(t)\right] = \int_{\infty}\int_{\infty}\int_{\infty} \frac{dx_{n-1}}{N_x} \cdot \frac{dx_{n-2}}{N_x} \ldots \frac{dx_2}{N_x}, \quad (3.2.4)$$

и учитывая, что показатели экспонент суммируются, можно записать выражение для пропагатора (3.2.3) в следующем виде:

$$K(x_b, x_a) =$$

$$= \int_{\{x(t)\}} D[x(t)] \cdot \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{mc}{2} \left(\frac{dx}{dt}(t) \right)^2 - \frac{1}{c} U\left(x(t)\right) \right) dt \right\}, \quad (3.2.5)$$

где интегрирование $D[x(t)]$ производится по всем возможным траекториям частицы. В показателе экспоненты фигурирует действие вдоль траектории для частицы, как бы находящейся во внешнем потенциальном поле $U(x(t))$.

Обобщение (3.2.5) на случай произвольной системы частиц осуществляется естественным образом

$$K(x_b, x_a) = \int_{\{x(t)\}} D[x(t)] \cdot \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{x_a}^{x_b} S(x^p(t), \dot{x}^p(t) \ldots) dt \right\}, \quad (3.2.6)$$

где $x^p(t)$ — траектория в пространстве параметров системы, $S(x^p(t), x^p(t)\ldots)$ — действие для системы вдоль траектории.

Такая конструкция (3.2.6) получила название "фейнмановского интеграла по траекториям".

В классическом пределе, когда действие для частицы вдоль траектории значительно превышает $\hbar$, основной вклад в интеграл (3.2.6) вносят траектории, близкие к классическим, так как условие экстремума функционала

$$\frac{\delta S(x^p(t), \dot{x}^p(t)\ldots)}{\delta x^p} = 0;$$

обеспечивает близость фаз вкладов таких траекторий, тогда как траектории, далекие от классических, приводят к появлению быстроосциллирующих вкладов.

Нетрудно показать, что фейнмановский подход полностью воспроизводит результаты традиционной квантовой механики. Действительно, эволюция волновой функции (амплитуды вероятности нахождения частицы в некоторой точке) $\varphi(x,t)$ в соответствии со стандартным выражением для действия классической нерелятивистской частицы вдоль прямолинейной траектории будет задаваться уравнением:

$$\varphi(x_2, t+\varepsilon) = \int_{\infty} \frac{dx_2}{N_x} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mc}{2}\left(\frac{x_2-x_1}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{1}{c}U\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right)\varepsilon\right\}\varphi(x_1, t). \tag{3.2.8}$$

Для перехода к соответствующим дифференциальным уравнениям, как правило, используется метод стационарных фаз. Согласно этому методу, следует разложить в ряд Тейлора величины, входящие в уравнение (3.2.8)

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mc}{2}\left(\frac{x_2-x_1}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{1}{c}U\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right)\varepsilon\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{mc}{2}\left(\frac{x_2-x_1}{\varepsilon}\right)^2\varepsilon\right\}\cdot\left(1 - \frac{i\varepsilon}{c\hbar}\cdot U(x_b)\ldots\right); \tag{3.2.9а}$$

$$\varphi(x_1, t) = \varphi(x_2, t) - \frac{\partial\varphi(x_2, t)}{\partial x_2^i}\Delta x^i + \frac{\partial\varphi(x_2, t)}{\partial x_2^i \partial x_2^j}\Delta x^i \Delta x^j + \ldots \tag{3.2.9б}$$

$$\varphi(x_1, t+\varepsilon) = \varphi(x_2, t) + \frac{\partial\varphi(x_2, t)}{\partial t}\varepsilon + \ldots \tag{3.2.9в}$$

Интегрирование в (3.2.7) в этом случае сводится к вычислению гауссовых интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{imc}{2\hbar\varepsilon}(\zeta)^2\right\} d\zeta = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{mc}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (3.2.10а)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta \cdot \exp\left\{\frac{imc}{2\hbar\varepsilon}(\zeta)^2\right\} d\zeta = 0; \qquad (3.2.10б)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\zeta)^2 \cdot \exp\left\{\frac{imc}{2\hbar\varepsilon}(\zeta)^2\right\} d\zeta = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{mc}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (3.2.10в)$$

Результат интегрирования с точностью до величин первого порядка малости по ε записывается следующим образом:

$$\varphi(x_2, t) + \frac{\partial\varphi(x_2, t)}{\partial t}\varepsilon = \frac{1}{N_x} \cdot \left(1 - \frac{i\varepsilon}{c\hbar} \cdot U(x_2)\right)\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{mc}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot$$
$$\cdot \left(\varphi(x_2, t) + \frac{i\hbar\varepsilon}{2mc} \cdot \frac{\partial\varphi(x_2, t)}{\partial x_2^i \partial x_2^i}\right), \qquad (3.2.11)$$

что при $N = \left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{mc}\right)^{\frac{3}{2}}$ соответствует стандартному уравнению Шредингера

$$i\hbar c \cdot \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x^i \partial x^i} + U(x) \cdot \varphi(x,t). \qquad (3.2.12)$$

Таким образом, уравнение эволюции (3.2.8), с одной стороны, непосредственно следующее из определения пропагатора, а с другой — приводящее к стандартному уравнению Шредингера, является одним из фундаментальных элементов теории. По существу, это уравнение задает некоторый марковский случайный процесс, матрица перехода которого соответствует фундаментальной S–матрице для физической системы.

§ 3.3. Релятивистское описание скалярных частиц методом интегрирования по траекториям

Переход от фейнмановской нерелятивистской квантовой механики к релятивистскому случаю, как уже отмечалось, обычно представляется в виде двух этапов. Первый состоит в обобщении фейнмановского метода на случай релятивистской скалярной частицы, а второй связан с введением спина частицы. В этом параграфе напомним основные положения первого этапа.

Очевидно, что для релятивизации фейнмановского метода прежде всего необходимо заменить в пропагаторе (3.2.1) классическое действие рассматриваемой частицы i на релятивистское, причем в последнем взаимодействие должно пониматься в духе теории прямого межчастичного взаимодействия. Это означает, что пропагатор вдоль конкретной траектории Γ этой частицы должен иметь вид

$$K_i(\Gamma) = \frac{1}{N} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_i(\Gamma)\right\}, \tag{3.3.1}$$

где классическое действие имеет вид

$$S_i(\Gamma) = -m_i \int_{\Gamma_i} ds_i - \sum_{\{j \neq i\}} e_i e_j \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_j} \delta\left(S^2(i,j)\right) g_{\alpha\beta}\, dx_i^{\alpha}\, dx_j^{\beta}, \tag{3.3.2}$$

Здесь Γ означает траектории, e_i, e_j — заряды, m_i — массу частиц.

Основная проблема состоит в выборе параметра эволюции. Замена абсолютного времени t на временно-подобную координату x^0 для нашей цели не подходит. Дело в том, что фейнмановский метод приводит к дифференциальному уравнению первого порядка по параметру эволюции, тогда как по пространственным координатам уравнение будет второго порядка. Нарушается пространственно-временная симметрия. Для преодоления этой трудности обычно вводится дополнительный параметр эволюции τ, фактически соответствующий новому временно-подобному измерению (назовем его шестым). При этом все четыре классические пространственно-временные координаты x^{μ} полагаются равноправными.

Опять разделяя конечный промежуток параметра эволюции на малые равные интервалы $\Delta\tau = \tau_{n+1} - \tau_n = \varepsilon$ и полагая τ пропорциональным собственному времени избранной частицы, классическое действие между двумя близкими моментами можно представить в виде

$$S(x_2, x_1, \Delta\tau) = g_{\mu\nu} \frac{m(x_2^{\mu} - x_1^{\mu})(x_2^{\nu} - x_1^{\nu})}{\varepsilon} + \frac{e}{c} \cdot A_{\mu}\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)(x_2^{\mu} - x_1^{\mu}), \tag{3.3.3}$$

где при обозначении заряда и массы частицы опущен ее индекс i. Здесь A_μ интерпретируется как векторный электромагнитный потенциал, который, напомним, в рамках теории прямого межчастичного взаимодействия служит лишь обозначением суммы следующего вида:

$$A_\mu\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right) = A_\mu(i) = \sum_{\{j\neq i\}} A_\mu(i,j) = \sum_{\{j\neq i\}} e_j \int_{\Gamma_j} \delta\left(S^2(i,j)\right)^0 g_{\mu\nu} dx_j^\nu, \quad (3.3.4)$$

Пропагатор

$$K_a(x_2^\mu, x_1^\mu, \Delta\tau) = \frac{1}{N}\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\cdot S_a(x_2^\mu, x_1^\mu, \Delta\tau)\right\}, \quad (3.3.5)$$

задает уравнение эволюции (динамический принцип) для волновой функции:

$$\varphi(x_2, \tau+\varepsilon) =$$

$$= \int_\infty \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(g_{\mu\nu}\frac{m(x_2^\mu - x_1^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)}{\varepsilon} + \frac{e}{c}\cdot A_\mu\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)(x_2^\mu - x_1\mu)\right)\right\}\cdot$$

$$\cdot \varphi(x_1, \tau)\frac{d^4x_1}{N}. \quad (3.3.6)$$

Разлагая в ряд Тейлора величины, входящие в уравнение

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(g_{\mu\nu}\frac{m(x_2^\mu - x_1^\mu)(x_2^\nu - x_1^\nu)}{\varepsilon} + \frac{e}{c}\cdot A_\mu\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)(x_2^\mu - x_1^\mu)\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{i}{\hbar} g_{\mu\nu}\frac{m\Delta x^\mu \Delta x^\nu}{\varepsilon}\right\}\cdot \quad (3.3.7)$$

$$\cdot\left(1 + \frac{ie}{c\hbar}\cdot A_\mu(x_2^\alpha)\Delta x_2^\mu + \frac{1}{2}\cdot\frac{ie}{c\hbar}\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial x_2^\nu}\Delta x_2^\mu \Delta x_2^\nu ..\right);$$

$$\varphi(x_1, \tau) = \varphi(x_2, \tau) - \frac{\partial\varphi(x_2,\tau)}{\partial x_2^\mu}\Delta x^\mu + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\varphi(x_2,\tau)}{\partial x_2^\mu \partial x_2^\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu + ..; \quad (3.3.8)$$

$$\varphi(x_2, \tau+\varepsilon) = \varphi(x_2, \tau) + \frac{\partial\varphi(x_2,\tau)}{\partial\tau}\varepsilon + ..; \quad (3.3.9)$$

уравнение эволюции приводится к виду:

$$\varphi(x_2,\tau)+\frac{\partial\varphi(x_2,\tau)}{\partial\tau}\varepsilon=$$

$$=\int_{\infty}\frac{d^4x_1}{N_x}\cdot\left(1+\frac{ie}{c\hbar}\cdot A_\mu(x_2^\alpha)\Delta x_2^\mu+\frac{1}{2}\cdot\frac{ie}{c\hbar}\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial x_2^\nu}\Delta x_2^\mu\Delta x_2^\nu\right)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{i}{\hbar}g_{\mu\nu}\frac{m\Delta x^\mu\Delta x^\nu}{\varepsilon}\right\}\cdot \tag{3.3.10}$$

$$\cdot\left(\varphi(x_2,\tau)-\frac{\partial\varphi(x_2,\tau)}{\partial x_2^\mu}\Delta x^\mu+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\varphi(x_2,\tau)}{\partial x_2^\mu\partial x_2^\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu\right).$$

Замена переменных $\eta^\mu=\Delta x^\mu=(x^\mu-x^\mu)$ сводит задачу интегрирования в (3.3.10) к вычислению гауссовых интегралов.

Полученный результат

$$i\hbar\cdot\frac{\partial\varphi(x,\tau)}{\partial\tau}=$$

$$=\frac{\hbar^2}{2mc}\cdot g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{ie}{\hbar c}\cdot A_\mu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}-\frac{ie}{\hbar c}\cdot A_\nu\right)\varphi(x,\tau); \tag{3.3.11}$$

представляет собой известное 4+1 уравнение Шредингера. Для перехода к стандартному уравнению Клейна–Фока необходимо дополнительно постулировать специальный вид зависимости волновой функции от дополнительного параметра эволюции

$$\varphi(x^\mu,\tau)=\varphi(x^\mu)\exp\left(\frac{imc}{2\hbar}\tau\right). \tag{3.3.12}$$

Несмотря на то, что такое предположение восстанавливает стандартную форму уравнения Клейна–Фока

$$\left(g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{ie}{\hbar c}\cdot A_\mu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}-\frac{ie}{\hbar c}\cdot A_\nu\right)+\frac{(mc)^2}{\hbar^2}\right)\varphi(x,\tau)=0 \tag{3.3.13}$$

остается открытым вопрос об интерпретации дополнительного параметра эволюции и его соотношении с физическим временем.

С помощью этого метода рассматривалась релятивистская фейнмановская теория для частицы с учетом не только электромагнитного, но и гравитационного взаимодействия [54,55].

ГЛАВА 3.2

ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ ДЛЯ СПИНОРНЫХ ЧАСТИЦ И БИНАРНАЯ ГЕОМЕТРОФИЗИКА

§ 3.4. Проблема описания спинорных частиц

Второй этап обобщения фейнмановской теории состоит во введении спина фермионных частиц, т.е. в переходе от уравнения Клейна–Фока (3.3.13) к уравнению Дирака. Здесь основные трудности обусловлены, во–первых, отсутствием понятия спина в классическом действии S для точечной частицы и, во–вторых, тем фактом, что дифференциальные уравнения, получающиеся из динамического принципа типа (3.3.6), являются уравнениями второго порядка по пространственно–временным координатам. Поэтому переход к уравнению Дирака обычно мыслился [56] как добавление в классическое действие членов, соответствующих спину, и последующее "извлечение квадратного корня" из уравнения Клейна–Фока со спиновым вкладом.

Напомним соотношение между уравнениями Дирака и уравнением Клейна–Фока для случая частицы, взаимодействующей электромагнитным образом. Чтобы получить из уравнения Дирака

$$\gamma^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-\frac{ie}{\hbar c}\cdot A_{\nu}\right)\Psi(x^{\mu})+\frac{imc}{\hbar}\Psi(x^{\mu})=0; \tag{3.4.1}$$

уравнение Клейна–Фока, производится квадрирование, которое заключается в действии на обе части уравнения Дирака оператора

$$\gamma^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-\frac{ie}{\hbar c}\cdot A_{\nu}\right).$$

Результирующее выражение:

$$\left(g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{ie}{\hbar c}A_{\mu}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-\frac{ie}{\hbar c}A_{\nu}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{ie}{2c\hbar}\gamma^{[\nu}\gamma^{\mu]}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{(mc)^2}{\hbar^2}\right)\Psi=0; \tag{3.4.2}$$

отличается от стандартного уравнения Клейна–Фока наличием добавочного члена Паули $\frac{ie}{2c\hbar}\gamma^{[\nu}\gamma^{\mu]}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{ie}{2c\hbar}\gamma^\nu\gamma^\mu F_{\nu\mu}$, который может быть введен в выражение для действия (3.3.3)

$$S_\alpha(x_2, x_1, \Delta\tau=\varepsilon) = \tag{3.4.3}$$
$$= g_{\mu\nu}\frac{m\Delta x^\mu \Delta x^\nu}{\varepsilon} + \frac{e}{c}A_\mu \Delta x^\mu + \frac{e}{2c}\gamma^\nu\gamma^\mu F_{\nu\mu}9_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta.$$

С учетом добавочного члена $\frac{e}{2c}\gamma^\nu\gamma^\mu F_{\nu\mu}\Delta x^\nu \Delta x^\mu$ разложение экспоненты в уравнении эволюции примет вид:

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(g_{\mu\nu}\frac{m\Delta x^\mu \Delta x^\nu}{\varepsilon} + \frac{e}{c}\cdot A_\mu\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\Delta x^\mu + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{e}{2c}\gamma^\nu\gamma^\mu F_{\nu\mu}9_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta\right)\right\} = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}g_{\mu\nu}\frac{m\Delta x^\mu \Delta x^\nu}{\varepsilon}\right\}\cdot$$
$$\cdot\left(1 + \frac{ie}{c\hbar}\cdot A_\mu(x_2^\alpha)\Delta x_2^\mu + \frac{1}{2}\cdot\frac{ie}{c\hbar}\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial x_2^\nu}\Delta x_2^\mu \Delta x_2^\nu + \right. \tag{3.4.4}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\cdot\frac{ie}{c\hbar}\cdot\gamma^\nu\gamma^\mu F_{\nu\mu}9_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta\right);$$

Результат интегрирования представляет собой 4+1–мерное уравнение Шредингера с добавочными членами Паули, описывающими взаимодействие магнитного момента частицы с полем $F_{\mu\nu}$:

$$i\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \frac{\hbar^2}{2mc}\cdot g^{\mu\nu}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{ie}{\hbar c}A_\nu\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{ie}{2c\hbar}\gamma^\nu\gamma^\mu F_{\nu\mu}\right)\Psi = 0; \tag{3.4.5}$$

Переход от 4+1–мерного уравнения Шредингера к уравнению Клейна–Фока осуществляется аналогично предыдущему случаю, путем постулирования специального вида зависимости волновой функции Ψ от дополнительного параметра эволюции, как в (3.3.12).

Изложенный метод описания релятивистских спинорных частиц имеет ряд существенных особенностей. Во–первых, уравнение эволюции не приводит непосредственно к уравнению Дирака, а лишь к

его квадрированному варианту, и, во-вторых, в силу появления матричнозначного слагаемого в действии и нарушения свойства аддитивности показателя экспоненты теряет смысл определение интеграла по траекториям в своей канонической форме (3.2.6). Последнее позволяет утверждать, что для спинорных частиц *принципиально* отсутствует возможность записи уравнения эволюции в виде интеграла по траекториям в канонической форме (1.2.6).

Необходимо отметить, однако, что в отличие от случая спинорных *частиц*, для спинорного *поля* классическое действие существует и имеет следующий вид:

$$S_D(\Psi,\Delta\tau)=\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\infty} \frac{d^4x}{N_\Psi}\cdot\overline{\Psi}(x^\mu,\tau)\gamma^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}-\frac{ie}{\hbar c}\cdot A_\nu\right)\Psi(x^\mu,\tau). \quad (3.4.6)$$

Нетрудно формальным образом обобщить фейнмановский метод квантования на спинорное поле. Такое обобщение сегодня встречается довольно часто, однако при этом теряется изначальный смысл фейнмановского подхода. Получающаяся таким образом теория концептуально отличается от обсуждаемой здесь. Другими словами, она принадлежит другой физической парадигме.

§ 3.5. Дискретное уравнение эволюции для свободной релятивистской частицы спина 1/2

В наших работах [10, 57] предложен другой путь обобщения фейнмановского метода квантования, имеющий дело непосредственно со спинорными частицами (см. также [58, 59]). Этот метод приводит сразу к уравнениям Дирака, минуя промежуточное уравнение Клейна–Фока. Более того, в нашем подходе последнее естественным образом получается из уравнений Дирака. Этот путь оказывается тесно связанным с идеологией бинарной геометрофизики.

Предлагается использовать в качестве параметра эволюции временно–подобную координату $x^0 = t$, причем, как будет показано ниже, можно использовать x в любой системе отсчета. Поскольку время x^0 оказывается явно выделенным, то вся методика получения уравнений, на первый взгляд, выглядит релятивистски неинвариантной, однако окончательный результат оказывается лоренц–ковариантным — происходит своеобразное "спонтанное восстановление симметрии".

Аналогично тому, как это делалось в фейнмановской нерелятивистской квантовой механике, значения $x^0 = t$ делятся на достаточно малые интервалы $\Delta x^0 = \Delta t = \varepsilon c$. Состояния системы будут рассматриваться в дискретные моменты $x^0_n = n\varepsilon c$, где n — целое число. Далее полагается, что четные и нечетные моменты параметра x^0 не являются эквивалентными. В четные моменты $n = 0,2,4,\ldots$ состояния частицы описываются 2–компонентными функциями $\Psi_Ч(\vec{x}_Ч, t_Ч)$, а в нечетные моменты $n = 1,3,5,\ldots$ — 2–компонентными функциями $\Psi_Н(\vec{x}_Н, t_Н)$. Тогда эволюция системы (распространение свободной частицы со спином) должна описываться двухступенчатым динамическим принципом. Постулируется, что переход частицы от "нечетного" момента в "четный" описывается соотношением [60,61]

$$\Psi_Ч(\vec{x}_2, t_2) = \int\limits_{\infty} \frac{\sigma^{\mu}_{-} p_\mu}{mc} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x_2^j - x_1^j\right)\right)\right\}\Psi_Н(\vec{x}_1, t_1)\,\frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}; \tag{3.5.1}$$

а переход от "четного" момента в "нечетный" — выражением

$$\Psi_Н(\vec{x}_3, t_3) = \int\limits_{\infty} \frac{\sigma^{\mu}_{+} p_\mu}{mc} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x_3^j - x_2^j\right)\right)\right\}\Psi_Ч(\vec{x}_2, t_2)\,\frac{d^3x_2 d^3p}{N_{xp}}; \tag{3.5.2}$$

где σ_+^μ и σ_-^μ два набора из матрицы $\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и трех матриц Паули σ^j соответственно:

$$\sigma_-^\mu = (\sigma^0, -\sigma^j); \quad \sigma_+^\mu = (\sigma^0, \sigma^j). \tag{3.5.3}$$

В динамическом принципе (3.5.1)—(3.5.2) постулируется следующий вид связи между компонентами импульса:

$$(p_0)^2 - (p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 = (mc)^2, \tag{3.5.4}$$

где $p_0 = (E/c)$.

Динамический принцип (3.5.1)—(3.5.2) справедлив для произвольных соседних интервалов времени $t - t' = \varepsilon$. Динамический принцип для произвольного интервала времени $t - t_0 = n\varepsilon$ строится путем последовательного применения выражений (3.5.1)—(3.5.2). Так, волновая функция $\Psi_s(\vec{x}_n, t)$ в момент времени t выражается через волновую функцию $\Psi_q(\vec{x}_{n-1}, t-\varepsilon)$ в момент времени $t - \varepsilon$. В свою очередь, $\Psi_q(\vec{x}_{n-1}, t-\varepsilon)$ выражается через $\Psi_s(\vec{x}_{n-2}, t-2\varepsilon)$ в момент времени $t - 2\varepsilon$, а $\Psi_s(\vec{x}_{n-2}, t-2\varepsilon)$ через $\Psi_q(\vec{x}_{n-3}, t-3\varepsilon)$ в момент $t - 3\varepsilon$ и т.д. (s,q принимают значения $\{ч,н\}$, причем, в данном случае $s \neq q$). Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет достигнут "начальный" момент $t_0 = t - n\varepsilon$, где n может быть сколь угодно большим. В полученном выражении вида:

$$\Psi_s(x_n, t_1) = \int_\infty \int_\infty \dots \int_\infty \frac{\sigma_q^\mu p_\mu^{n-1}}{mc} \cdot \frac{\sigma_s^\nu p_\nu^{n-2}}{mc} \dots \frac{\sigma_r^\gamma p_\gamma^0}{mc} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E^{n-1}\varepsilon + p_j^{n-1}\left(x_n^j - x_{n-1}^j\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{\hbar}\left(E^{n-2}\varepsilon + p_j^{n-2}\left(x_{n-1}^j - x_{n-2}^j\right)\right) + .. + \frac{i}{\hbar}\left(E^0\varepsilon + p_j^0\left(x_1^j - x_0^j\right)\right)\right\} \cdot$$

$$\cdot \Psi_r(x_0, t_0) \frac{d^3x_{n-1}d^3p^{n-1}}{N_{xp}} \cdot \frac{d^3x_{n-2}d^3p^{n-2}}{N_{xp}} \dots \frac{d^3x_0 d^3p^0}{N_{xp}}, \tag{3.5.5}$$

где s,q,r принимают значения $\{ч,н\}$ $(s \neq q)$, $\sigma_q^\mu, \sigma_s^\nu .. \sigma_r^\gamma$ — соответствующие наборы σ–матриц: $\sigma_H^\mu = \sigma_+^\mu$; $\sigma_q^\mu = \sigma_-^\mu$ (см.(3.5.3)), может быть сравнительно просто произведено интегрирование по промежуточным точкам координатного $(d^3x_{n-1}, d^3x_{n-2} \dots d^3x_1)$ и импульсно-

го $(d^3p^{n-1}, d^3p^{n-2}\ldots d^3p^1)$ пространства. Действительно, в результате интегрирования по dx^3_{n-1} возникает δ–функция вида:

$$\int\limits_{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\left(p_j^{n-1} - p_j^{n-2}\right)x^j_{n-1}\right)\right\}\frac{d^3x}{N_{xp}} = \delta\left(p_j^{n-1} - p_j^{n-2}\right). \qquad (3.5.6)$$

Интегрирование по $d^3_{\bullet}p^{n-1}$ с учетом (3.5.6) дает следующее:

$$\left.\begin{aligned} &p_j^{n-1} = p_j^{n-2};\ \ E^{n-1}\varepsilon + E^{n-2}\varepsilon = E^{n-2}(2\varepsilon); \\ &\frac{\sigma_q^\mu p_\mu^{n-1}\sigma_s^\nu p_\nu^{n-2}}{(mc)^2} = \frac{\sigma_q^\mu\sigma_s^\nu p_\mu^{n-2}p_\nu^{n-2}}{(mc)^2} = \frac{g^{\mu\nu}p_\mu^{n-2}p_\nu^{n-2}}{(mc)^2} = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (3.5.7)$$

Последовательное интегрирование по dx^3_{n-2}, d^3p^{n-2}, dx^3_{n-3}, $d^3p^{n-3}\ldots dx^3_1$, d^3p^1, как нетрудно убедиться, приводит к выражению типа (3.5.1) при $s = ч$, $r = н$, (n — нечетно) и к выражению типа (3.5.2) при $s = н$, $r = ч$, (n — нечетно).

Особый интерес представляют случаи, когда t и t_0 разделяются четным числом интервалов ε. В частности, для соседних нечетных или четных моментов ($n = 2$) имеем соотношения, связывающие однотипные функции

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_H(\vec{x}_3, t_3) = \int\limits_{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(2E\varepsilon + p_j(x_3^j - x_1^j)\right)\right\}\Psi_H(\vec{x}_1, t_1)\frac{d^3x_1d^3p}{N_{xp}}; \\ &\Psi_Ч(\vec{x}_4, t_4) = \int\limits_{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(2E\varepsilon + p_j(x_4^j - x_2^j)\right)\right\}\Psi_Ч(\vec{x}_2, t_2)\frac{d^3x_2d^3p}{N_{xp}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.5.8)$$

Легко видеть, что эти выражения в нерелятивистском пределе совпадают с фейнмановским динамическим принципом типа (3.3.6) для свободной скалярной частицы.

Покажем, что из двухступенчатого динамического принципа (3.5.1)—(3.5.2) получаются стандартные уравнения Дирака для свободных частиц. Напомним, что в стандартной теории все моменты времени являются эквивалентными, и четыре компоненты биспинорной волновой функции $\Psi(\vec{x}, t)$ определены во всем 4–мерном пространстве–времени. В нашем подходе это не так. Можно, однако, доопределить значения 2–компонентной функции $\Psi_H(\vec{x}, t)$ на случай "четных" моментов времени (например, для момента $t_2 = t_1 + \varepsilon$)

естественным образом как среднеарифметическое от двух соседних нечетных моментов, где эта функция изначально определена:

$$\Psi_H(\vec{x}, t_2) = \frac{1}{2}\left(\Psi_H(\vec{x}, t_2 + \varepsilon) + \Psi_H(\vec{x}, t_2 - \varepsilon)\right) =$$

$$= \int_{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right\}\Psi_H(\vec{x}_1, t_2 - \varepsilon)\frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}. \quad (3.5.9)$$

Последнее равенство доказывается непосредственно, опираясь на соотношение

$$\frac{1}{2}\left(1 + \exp(2\alpha\varepsilon)\right) = 1 + \alpha\varepsilon + ..\varepsilon^2 + \ldots = \exp(\alpha\varepsilon) + ..\varepsilon^2 + \ldots \quad (3.5.10)$$

Аналогично определяется значение $\Psi_Ч(\vec{x}, t)$ в "нечетные" моменты времени:

$$\Psi_Ч(\vec{x}, t_1) = \frac{1}{2}\left(\Psi_Ч(\vec{x}, t_1 + \varepsilon) + \Psi_Ч(\vec{x}, t_1 - \varepsilon)\right) =$$

$$= \int_{\infty} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right\}\Psi_Ч(\vec{x}_1, t_1 - \varepsilon)\frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}. \quad (3.5.11)$$

Одним из важных свойств динамического принципа (3.5.1)—(3.5.2) является *сохранение нормы волновой функции*, определяемой стандартным образом:

$$\int_{\infty} \rho(\vec{x},t)dx^3 = \int_{\infty} \left(\Psi_Ч^{+}(\vec{x},t)\Psi_H(\vec{x},t) + \Psi_H^{+}(\vec{x},t)\Psi_Ч(\vec{x},t)\right)dx^3, \quad (3.5.12)$$

где $\Psi_Ч(\vec{x},t)$ в "нечетные", а $\Psi_H(\vec{x},t)$ в "четные" моменты времени t определены согласно (3.5.9) и (3.5.11). Рассмотрим одно из слагаемых, входящих в (3.1.12)

$$\int_{\infty} \Psi_Ч^{+}(\vec{x},t)\Psi_H(\vec{x},t+\varepsilon)dx^3 = \int_{\infty} \Psi_H^{+}(\vec{x}_1,t-\varepsilon)\frac{\left(\sigma_{-}^{\mu}p_{\mu}^1\right)\left(\sigma_{+}^{\nu}p_{\nu}^2\right)}{(mc)^2}\Psi_Ч(\vec{x}_2,t) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(-E^1\varepsilon - p_j^1\left(x^j - x_1^j\right) + E^2\varepsilon + p_j^2\left(x^j - x_2^j\right)\right)\right\} \cdot \quad (3.5.13)$$

$$\cdot \frac{d^3x_1 d^3p^1}{N_{xp}} \cdot \frac{d^3x_2 d^3p^2}{N_{xp}} dx^3.$$

Интегрируя последовательно по $dx^3, d^3p^1, d^3p^2, d^3x_1$, приходим к соотношению:

$$\int_{\infty} \Psi_q^+(\vec{x},t)\Psi_H(\vec{x},t+\varepsilon)dx^3 = \int_{\infty} \Psi_H^+(\vec{x},t-\varepsilon)\Psi_q(\vec{x},t)dx^3; \quad (3.5.14)$$

Анализ аналогичных слагаемых в (3.1.12) доказывает сохранение нормы волновой функции для произвольных моментов времени t_1, t_2:

$$\int_{\infty} \rho\,(\vec{x},t+\varepsilon)dx^3 = \tag{3.5.15}$$

$$= \int_{\infty} \rho\,(\vec{x},t)dx^3 => \int_{\infty} \rho\,(\vec{x},t_1)dx^3 = \int_{\infty} \rho\,(\vec{x},t_2)dx^3.$$

Закон сохранения нормы волновой функции допускает запись в традиционной форме, соответствующей закону сохранения электрического заряда:

$$\int_{\infty} \rho\,(\vec{x},t)dx^3 = \int_{\infty} \overline{\Psi}^+(\vec{x},t)\,\gamma^0\,\overline{\Psi}(\vec{x},t)dx^3 = \text{const}, \quad (3.5.16)$$

где $\overline{\Psi}(\vec{x},t)$ — 4-компонентная волновая функция $\overline{\Psi}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix}\Psi_H(\vec{x},t)\\ \Psi_q(\vec{x},t)\end{pmatrix}$; γ^0 — матрица Дирака вида $\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$ (здесь используется спинорное представление гамма матриц Дирака $\gamma^i = \begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix}$).

Поскольку параметр эволюции в данной модели дискретен, производную по времени определим в виде

$$\left.\frac{\partial\Psi_q(\vec{x},t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \frac{\Psi_q(\vec{x},t+\Delta t) - \Psi_q(\vec{x},t-\Delta t)}{2\Delta t} + 0(\Delta\, t^2). \quad (3.5.17)$$

Выражая $\Psi_q(\vec{x},t_0+\Delta\, t)$ и $\Psi_q(\vec{x},t_0-\Delta\, t)$ через $\Psi_H(\vec{x},t_1)$ в момент времени $t_1 = t_0 - \Delta\, t - \varepsilon$

$$\left.\frac{\partial\Psi_q(\vec{x},t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \frac{1}{2\Delta t}\int_{\infty} \frac{\sigma^{\mu}_{\mp} p_{\mu}}{mc}\left[\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\left(\varepsilon+2\Delta\, t\right)+p_j\left(x^j-x_1^j\right)\right)\right\} - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon+p_j\left(x^j-x_1^j\right)\right)\right\}\right]\Psi_q(\vec{x}_1,\, t_1)\frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}. \quad (3.5.18)$$

с точностью до членов второго порядка по Δt имеем:

$$\left.\frac{\partial \Psi_{\text{ч}}(\vec{x},t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \int_{\infty} \left(\frac{iE}{\hbar}\right) \frac{\sigma^{\mu} p_{\mu}}{mc} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right\} \cdot$$

$$\cdot \Psi_{\text{ч}}(\vec{x}_1, t_0 - \varepsilon) \frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}. \qquad (3.5.19)$$

Аналогично для $\frac{\partial \Psi_H(\vec{x},t)}{\partial t}$:

$$\left.\frac{\partial \Psi_H(\vec{x},t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \int_{\infty} \left(\frac{iE}{\hbar}\right) \frac{\sigma^{\mu}_{+} p_{\mu}}{mc} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right\} \cdot$$

$$\cdot \Psi_{\text{ч}}(\vec{x}_1, t_0 - \varepsilon) \frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}. \qquad (3.5.20)$$

Воздействуем оператором $\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ на обе части уравнения эволюции (3.5.1)

$$\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \Psi_{\text{ч}}(\vec{x}_2, t_2) = \left(\frac{i}{\hbar}\right) \int_{\infty} \frac{\sigma^{\mu} p_{\mu}}{mc} \left(\sigma^0 (E/c + \sigma^i p_i)\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x_2^j - x_1^j\right)\right)\right\} \Psi_H(\vec{x}_1, t_1) \frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}. \qquad (3.5.21)$$

Учитывая связь между компонентами импульса (3.5.4), а также (3.5.11), приходим к уравнению:

$$\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \Psi_{\text{ч}}(\vec{x},t) = \left(\frac{imc}{\hbar}\right) \Psi_H(\vec{x},t). \qquad (3.5.22)$$

Аналогично, действуя оператором $\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} - \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ на обе части уравнения эволюции (3.5.2), имеем:

$$\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} - \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \Psi_H(\vec{x},t) = \left(\frac{imc}{\hbar}\right) \Psi_{\text{ч}}(\vec{x},t). \qquad (3.5.23)$$

Переходя к 4-компонентной функции $\overline{\Psi}(\vec{x},t)$ и матрицам Дирака, уравнения (3.5.22) и (3.5.23) можно объединить в виде

$$\left(\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \overline{\Psi}(\vec{x},t) = \left(\frac{imc}{\hbar}\right) \overline{\Psi}(\vec{x},t), \qquad (3.5.24)$$

что соответствует стандартным уравнениям Дирака.

Следует подчеркнуть, что несмотря на выделенный характер времени t в исходных уравнениях эволюции (3.5.1,2), получающиеся для волновой функции дифференциальные уравнения имеют стандартную релятивистскую форму, т.е. имеет место явление "*спонтанного восстановления симметрии*".

Таким образом, двухступенчатый динамический принцип (3.5.1)—(3.5.2) действительно можно рассматривать как обобщение фейнмановского метода квантования скалярных частиц. С одной стороны, из него непосредственно следуют уравнения Дирака для свободных спинорных частиц, с другой стороны, этот динамический принцип для однотипных (только четных или только нечетных) моментов времени соответствует фейнмановскому динамическому принципу для скалярных частиц. Это позволяет относиться к (3.5.1)—(3.5.2) как к одному из основополагающих принципов построения релятивистской квантовой теории частиц спина 1/2.

На первый взгляд, постулирование динамического принципа (3.5.1)—(3.5.2) может показаться лишь некой попыткой переформулировать релятивистскую квантовую теорию спинорных частиц так, чтобы одни постулаты заменялись на другие. Аналогичных примеров при аксиоматическом построении геометрии и физических теорий довольно много. Всегда теоремы в одной формулировке можно сделать постулатами в другой. Тогда постулаты первой станут теоремами в другой аксиоматике. Конечно, подобная замена может представить самостоятельный интерес, однако лучше, если она диктуется какими–то преимуществами, выдвижением на первый план каких–то элементов теории, помогающими в решении той или иной проблемы или в развитии некой программы. Оказалось, что иследования в рамках бинарной геометрофизики, с одной стороны, обосновывают использование динамического принципа для спинорных частиц именно в форме (3.5.1)—(3.5.2), а с другой стороны, вбирают в себя изложенные выше результаты при наведении моста между принципами бинарной геометрофизики и стандартной квантовой теорией.

Действительно, две 2–компонентные функции $\Psi_Н$ и $\Psi_Ч$ могут быть сопоставлены с элементами i и α двух множеств бинарной структуры ранга (3,3;б) в § 2.5 второй части книги. Тогда две ступени динамического принципа (3.5.1)—(3.5.2) соответствуют двум частям прообраза уравнения Дирака (2.5.16) и (2.5.19) в импульсном пространстве. Интегрирование по фазовому пространству объясняется в бинарной геометрофизике композицией двух структур. Аналогичные выражения были записаны в § 2.8. Напомним также,

что там для композиции также необходимо было разбиение всех моментов эволюции на два класса: на четные и на нечетные моменты.

§ 3.6. Описание взаимодействия фермионов с электромагнитным полем

Для учета электромагнитного взаимодействия фермионов динамический принцип (3.5.1)—(3.5.2) должен быть обобщен. При этом к обобщению можно приступить в рамках различных физических парадигм. С позиций общепринятой теории учет электромагнитного взаимодействия осуществляется заменой

$$p_\mu \to \bar{p}_\mu = p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \left(\frac{\vec{x}_2 + \vec{x}_1}{2} \right) . \qquad (3.6.1)$$

Однако несложно убедиться, что такая замена импульсов в (3.5.1)—(3.5.2) ни к чему хорошему не приведет. Нужный результат получится, если произвести замену вида (3.6.1) лишь в одном месте, например, в матричном коэффициенте перед экспонентой

$$\Psi_ч(\vec{x}_2, t_2) = \int_\infty \frac{\sigma^\mu_- \left(\bar{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \left(\frac{\vec{x}_2 + \vec{x}_1}{2} \right) \right)}{mc} \cdot \exp \left\{ \frac{i}{ħ} \left(\bar{E}\varepsilon + \bar{p}_j \left(x_2^j - x_1^j \right) \right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \Psi_H(\vec{x}_1, t_1) \frac{d^3 x_1 d^3 p}{N_{xp}};$$

$$\Psi_H(\vec{x}_3, t_3) = \int_\infty \frac{\sigma^\mu_+ \left(\bar{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \left(\frac{\vec{x}_3 + \vec{x}_2}{2} \right) \right)}{mc} \cdot \exp \left\{ \frac{i}{ħ} \left(\bar{E}\varepsilon + \bar{p}_j \left(x_3^j - x_2^j \right) \right) \right\} \cdot$$

$$\cdot \Psi_ч(\vec{x}_2, t_2) \frac{d^3 x_2 d^3 \bar{p}}{N_{xp}} , \qquad (3.6.2)$$

где значение электромагнитного векторного потенциала $A_\mu(x)$ берется в промежуточных точках: $(\vec{x}_2 + \vec{x}_1)/2$ или $(\vec{x}_3 + \vec{x}_2)/2$, а для компонент 4–импульса $\bar{p}_\mu$ постулируется соотношение, аналогичное (3.5.4):

$$g^{\mu\nu} \left(\bar{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right) \right) \left(\bar{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\nu \left(\frac{x_2 + x_1}{2} \right) \right) = (mc)^2 . \qquad (3.6.3)$$

С позиций общепринятой теории такая частичная замена может показаться искусственной, тогда как с позиций принципов бинарной геометрофизики вполне естественна. Напомним, что во второй части книги было показано, что учет электромагнитного (электрослабого)

взаимодействия осуществляется с помощью перехода от структуры ранга (3,3;б) к структуре ранга (4,4;а). В рамках последней структуры также можно записать прообраз уравнения Дирака в импульсном пространстве. Об этом было сказано в § 2.12. Там же было пояснено, что при этом с необходимостью возникает добавок к 4-импульсу p_μ, определяемый характеристиками других частиц и интерпретируемый как электромагнитный (и не только электромагнитный) векторный потенциал. Обобщенный динамический принцип (3.6.2)—(3.6.3) как раз реализует эту закономерность в рамках структуры ранга (4,4;а). Однако в (3.6.2)—(3.6.3) содержится большее — на языке бинарной геометрофизики здесь произведена также композиция со структурой ранга (2,2). С помощью последней вводилось действие S свободной частицы. Композиция не меняет характера S — из него выделяется импульс p_μ свободной частицы, сворачиваемый с разностью координат. Именно это и отражено в обобщенном динамическом принципе (3.6.2)—(3.6.3).

Произведя замену переменных $\bar{p}_\mu \to p_\mu$ с помощью (3.6.1), динамический принцип можно переписать в ином виде:

$$\Psi_q(\vec{x}_2, t_2) = \int\limits_{\infty} \frac{\sigma^\mu_- p_\mu}{mc} \cdot \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\left(E + eA_0\left(\frac{\vec{x}_2+\vec{x}_1}{2} \right) \right)\varepsilon + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(p_j + \frac{e}{c}A_j\left(\frac{\vec{x}_2+\vec{x}_1}{2} \right) \right)\left(x^j_2 - x^j_1 \right) \right) \right\} \cdot \Psi_H(\vec{x}_1, t_1)\, \frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}; \qquad (3.6.4)$$

$$\Psi_H(\vec{x}_3, t_3) = \int\limits_{\infty} \frac{\sigma^\mu_+ p_\mu}{mc} \cdot \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\left(E + eA_0\left(\frac{\vec{x}_3+\vec{x}_2}{2} \right) \right)\varepsilon + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(p_j + \frac{e}{c}A_j\left(\frac{\vec{x}_3+\vec{x}_2}{2} \right) \right)\left(x^j_3 - x^j_2 \right) \right) \right\} \cdot \Psi_H(\vec{x}_2, t_2)\, \frac{d^3x_2 d^3p}{N_{xp}}, \qquad (3.6.5)$$

где для компонент p_μ имеет место соотношение (3.5.4).

Процедура перехода от динамического принципа в интегральной форме к дифференциальным уравнениям аналогична изложенной в предыдущем параграфе для свободной частицы. Все отличие состоит в присутствии электромагнитного векторного потенциала. Поскольку взаимодействие предполагается слабым, то в дальнейших выкладках будем пренебрегать слагаемыми, квадратичными по A_μ и его производным. Тогда динамический принцип (3.6.4)—(3.6.5) можно переписать в виде

$$\Psi_Ч(\vec{x}_2, t_1+\varepsilon) = \int\limits_{\infty} \frac{\sigma^{\mu}_{-} p_{\mu}}{mc} \cdot \left(1 + \frac{ie}{\hbar} A_0 \varepsilon + \frac{ie}{\hbar c} A_j \left(x_2^j - x_1^j\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x_2^j - x_1^j\right)\right)\right\} \Psi_H(\vec{x}_1, t_1) \frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}; \qquad (3.6.6)$$

$$\Psi_H(\vec{x}_3, t_2+\varepsilon) = \int\limits_{\infty} \frac{\sigma^{\mu}_{+} p_{\mu}}{mc} \cdot \left(1 + \frac{ie}{\hbar} A_0 \varepsilon + \frac{ie}{\hbar c} A_j \left(x_3^j - x_2^j\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x_3^j - x_2^j\right)\right)\right\} \Psi_Ч(\vec{x}_2, t_2) \frac{d^3x_2 d^3p}{N_{xp}}. \qquad (3.6.7)$$

Нетрудно убедиться, что при сделанных предположениях о характере электромагнитного взаимодействия уравнения эволюции для интервалов времени $\Delta t = m\varepsilon$ (m — нечетно) будут иметь в точности такой же вид, что и (3.6.6)—(3.6.7) с заменой $\varepsilon \to \Delta t$. Соответственно, для $\Delta t = n\varepsilon$ (n — четно) уравнения будут иметь "скалярную" форму:

$$\Psi_H(\vec{x}_2, t_1+\Delta t) = \int\limits_{\infty} \left(1 + \frac{ie}{\hbar} A_0 \Delta t + \frac{ie}{\hbar c} A_j \left(x_2^j - x_1^j\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\Delta t + p_j\left(x_2^j - x_1^j\right)\right)\right\} \Psi_H(\vec{x}_1, t_1) \frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}; \qquad (3.6.8)$$

$$\Psi_Ч(\vec{x}_3, t_2+\Delta t) = \int\limits_{\infty} \left(1 + \frac{ie}{\hbar} A_0 \Delta t + \frac{ie}{\hbar c} A_j \left(x_3^j - x_2^j\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\Delta t + p_j\left(x_3^j - x_2^j\right)\right)\right\} \Psi_Ч(\vec{x}_2, t_2) \frac{d^3x_2 d^3p}{N_{xp}}. \qquad (3.6.9)$$

Следует отметить, однако, что в отличие от свободной частицы, для частицы, взаимодействующей с внешним "полем", данные соотношения не являются точными при сколь угодно больших значениях m и n, поскольку в этом случае уже нельзя пренебрегать зависимостью векторного потенциала электромагнитного поля A_μ от пространственно–временных координат (x^j, t). Тем не менее, основные результаты, полученные для случая свободной частицы, сохраняют свою силу, правда, в несколько модифицированном виде.

Производная волновой функции Ψ_q по времени

$$\frac{\partial \Psi_q(\vec{x},t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \frac{\Psi_q(\vec{x},t+\Delta t) - \Psi_q(\vec{x},t-\Delta t)}{2\Delta t} + 0(\Delta t^2);$$

будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \Psi_q(\vec{x},t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \int_\infty \frac{\sigma^\mu_- p_\mu}{mc} \cdot \left[\left(\frac{iE}{\hbar}\right)\left(1 + \frac{ie}{\hbar} A_0 \Delta t + \frac{ie}{\hbar c} A_j\left(x^j - x_1^j\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{ie}{\hbar} A_0\right] \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right\} \cdot \Psi_H(\vec{x}_1, t_0 - \varepsilon) \frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}. \qquad (3.6.10)$$

Аналогично для $\frac{\partial \Psi_H(\vec{x},t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0}$:

$$\frac{\partial \Psi_H(\vec{x},t)}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \int_\infty \frac{\sigma^\mu_+ p_\mu}{mc} \cdot \left[\left(\frac{iE}{\hbar}\right)\left(1 + \frac{ie}{\hbar} A_0 \Delta t + \frac{ie}{\hbar c} A_j\left(x^j - x_1^j\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{ie}{\hbar} A_0\right] \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right\} \cdot \Psi_q(\vec{x}_1, t_0 - \varepsilon) \frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}. \qquad (3.6.11)$$

Значение $\Psi_H(\vec{x},t)$ в "четные" моменты времени:

$$\Psi_H(\vec{x},t_2) = \frac{1}{2}\left(\Psi_H(\vec{x}, t_2 + \varepsilon) + \Psi_H(\vec{x}, t_2 - \varepsilon)\right) =$$

$$= \int_\infty \left(1 + \frac{ie}{\hbar} A_0 \varepsilon + \frac{ie}{\hbar c} A_j\left(x^j - x_1^j\right)\right) \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right\} \cdot$$

$$\cdot \Psi_H(\vec{x}_1, t_2 - \varepsilon) \frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}} + 0(\varepsilon^2), \qquad (3.6.12)$$

а также значение $\Psi_q(\vec{x},t)$ в "нечетные" моменты времени:

$$\Psi_q(\vec{x},t_1) = \frac{1}{2}\left(\Psi_q(\vec{x}, t_1 + \varepsilon) + \Psi_q(\vec{x}, t_1 - \varepsilon)\right) =$$

$$= \int_\infty \left(1 + \frac{ie}{\hbar} A_0 \varepsilon + \frac{ie}{\hbar c} A_j\left(x^j - x_2^j\right)\right) \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x^j - x_2^j\right)\right)\right\} \cdot$$

$$\cdot \Psi_q(\vec{x}_2, t_2 - \varepsilon) \frac{d^3x_2 d^3p}{N_{xp}} + 0(\varepsilon^2); \qquad (3.6.13)$$

определяются аналогично случаю свободной частицы.

После того как определены соответствующие величины, переход от динамического принципа (3.6.2)—(3.6.3) к уравнениям Дирака для электромагнитным образом взаимодействующей частицы может быть осуществлен действием оператора $\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ на обе части лианеризированного уравнения эволюции (3.6.6)

$$\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Psi_Ч(\vec{x},t) = \int_\infty \frac{\sigma^\mu_- p_\mu}{mc} \cdot \left[\left(\sigma^0 \frac{ie}{\hbar c} A_0 + \sigma^j \frac{ie}{\hbar c} A_j\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{i}{\hbar}\right)\left(\sigma^0(E/c) + \sigma^i p_i\right)\left(1 + \frac{ie}{\hbar} A_0\varepsilon + \frac{ie}{\hbar c} A_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right] \quad (3.6.14)$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right\}\Psi_H(\vec{x}_1, t-\varepsilon)\frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}.$$

и оператора $\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} - \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ на обе части уравнения (3.6.8)

$$\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} - \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Psi_H(\vec{x},t) = \int_\infty \frac{\sigma^\mu_+ p_\mu}{mc} \cdot \left[\left(\sigma^0 \frac{ie}{\hbar c} A_0 - \sigma^j \frac{ie}{\hbar c} A_j\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{i}{\hbar}\right)\left(\sigma^0(E/c) - \sigma^i p_i\right)\left(1 + \frac{ie}{\hbar} A_0\varepsilon + \frac{ie}{\hbar c} A_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right] \quad (3.6.15)$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(E\varepsilon + p_j\left(x^j - x_1^j\right)\right)\right\}\Psi_Ч(\vec{x}_1, t-\varepsilon)\frac{d^3x_1 d^3p}{N_{xp}}.$$

Нетрудно убедиться, что с точностью до членов первого порядка по A_μ для Ψ_H и $\Psi_Ч$ будут справедливы следующие дифференциальные соотношения:

$$\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Psi_Ч(\vec{x},t) =$$

$$= \left(\sigma^0 \frac{ie}{\hbar c} A_0 + \sigma^j \frac{ie}{\hbar c} A_j\right)\Psi_Ч(\vec{x},t) + \left(\frac{imc}{\hbar}\right)\Psi_H(\vec{x},t); \quad (3.6.16)$$

$$\left(\sigma^0 \frac{\partial}{c\partial t} - \sigma^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Psi_H(\vec{x},t) =$$

$$= \left(\sigma^0 \frac{ie}{\hbar c} A_0 - \sigma^j \frac{ie}{\hbar c} A_j\right)\Psi_H(\vec{x},t) + \left(\frac{imc}{\hbar}\right)\Psi_Ч(\vec{x},t); \quad (3.6.17)$$

эквивалентные стандартным уравнениям Дирака:

$$\gamma^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\frac{ie}{\hbar c}A_{\mu}\right)\overline{\Psi}(x^{\nu})=\left(\frac{imc}{\hbar}\right)\overline{\Psi}(x^{\nu}), \qquad (3.6.18)$$

где $\overline{\Psi}(x^{\nu})$ — 4–компонентная волновая функция (биспинор), γ^{μ} — набор матриц Дирака в спинорном представлении.

Таким образом, динамический принцип (3.6.2)—(3.6.3), соответствующий принципу композиции двух структур рангов (4,4;а) и (2,2) в бинарной геометрофизике, приводит непосредственно к известному уравнению Дирака для электромагнитно взаимодействующих спинорных частиц.

Заключение

Завершая книгу, еще раз подчеркнем, что здесь предлагается новый подход к построению физической теории — на основе теории физических структур, опирающейся, в свою очередь, на особый тип симметрии — феноменологический (фундаментальный). Охарактеризованная здесь бинарная геометрофизика свидетельствует о том, что на известные понятия и закономерности современной теории пространственно–временных отношений и физических взаимодействий можно взглянуть сквозь призму бинарных комплексифицированных структур. В рамках классификации физических теорий и программ, данной в главе 2.5, изложенный здесь материал представляет собой новую (девятую) физическую парадигму. Однако, указывая место нашего подхода среди других иследований, мы не оспариваем правомочности и перспективности работ в рамках иных физических парадигм.

Ясно, что в рамках изложенного здесь подхода пока работал очень узкий круг лиц. Этой книгой авторы надеются привлечь внимание физиков–теоретиков и математиков к данному направлению, открывающему, по нашему мнению, новые широкие перспективы для развития фундаментальной теоретической физики. Как нам представляется, здесь исследователей ждет множество интересных проблем и задач как в области развития математического аппарата теории физических структур, так и в области бинарной геометрофизики и других физических приложений теории структур. Перечислим некоторые из них.

I. В области *математического аппарата* нам видятся следущие задачи, точнее — блоки задач:

1). Построение аксиоматики теории физических структур, уточнение основных понятий и формулировок. Этим вопросам сейчас уделяется значительное внимание в работах группы Ю.И.Кулакова в Новосибирске. Над ними работают Г.Г.Михайличенко, В.К.Ионин, В.Х.Лев и некоторые другие.

2). Развитие теории физических структур вширь — обобщение на случай структур не с парными отношениями, а с *тройными, четверными* и т.д. Здесь уже получен ряд результатов Г.Г.Михайличенко [1] еще на первых этапах развития теории физических структур. Дальнейшие исследования неизбежно должны слиться с циклом работ группы В.Я.Скоробогатько [62, 63] во Львове по многоточечным геометриям. Предварительные результаты по объединению этих направлений исследований уже получены.

3). Недавно был начат новый цикл исследований более общих физических структур, в которых между элементами вводится не одно вещественное отношение, а несколько: два, три "расстояния". Здесь уже выполнено несколько работ Г.Г.Михайличенко и Е.Л.Лозицким. Эти работы инициированы комплексификацией физических структур, произведенной Ю.С.Владимировым.

4). Особый интерес представляет обобщение ряда теорем единственности или отсутствия решений, полученных в группе Ю.И.Кулакова для случая вещественных отношений, на комплексифицированные бинарные физические структуры.

5). Интересный цикл исследований начат Е.Л.Лозицким. Цель их состоит в систематическом развитии математического аппарата симплектических и экзотических геометрий, вытекающих из теории физических структур. Предполагается научиться выделять в таких необычных геометриях аналоги известных в евклидовой геометрии понятий (или иные характерные понятия) типа углов, площадей, объемов и т.д. и находить соответствующие аналоги их свойств: теоремы синусов, косинусов, формулы для площадей, объемов и т.д.

II. Вдумчивый читатель наверняка почувствовал, что и в области охарактеризованной в книге *бинарной геометрофизики* еще имеется довольно много пока не решенных до конца задач. Отметим некоторые из них.

1). В первую очередь следует назвать дальнейшее исследование проблемы объединения моделей электрослабых и сильных взаимодействий в рамках бинарной структуры ранга (5,5;а).

2). Имеется ряд вопросов по уточнению предложенной модели электрослабых взаимодействий в рамках структуры ранга (4,4;а). Особенно это относится к сопоставлению понятий из теории структур и выражений из стандартной полевой модели электрослабых взаимодействий Вайнберга–Салама.

3). Вне рамок данной книги оказался вопрос об описании гравитационного взаимодействия в бинарной геометрофизике. Предварительные исследования показывают, что гравитационное взаимодействие охватывается этой программой, однако оно занимает особое положение среди других типов взаимодействий. Ему не соответству-

ет также и нарушение какой-либо из названных структур. Гравитация вводится в теорию в процессе композиции структур рангов (4,4;а) и (2,2).

4). Много вопросов остается относительно возможности проявлений в реальном мире и физического смысла бинарных физических структур более высокого ранга (рангов (6,6) и более). Не исключено, что они могут соответствовать новым типам фундаментальных физических взаимодействий.

5). Остается много задач по переформулировке и развитию квантовой теории в терминах бинарных физических структур.

Можно было бы этот список существенно продлить.

III. Следует еще раз напомнить, что бинарная геометрофизика опирается на диагональные (симметричные) бинарые физические структуры (т.е. ранга (r,r)). Возникает естественный *вопрос о роли структур рангов* $(r,r\pm1)$ *в физической картине мира.* Обсуждение этого вопроса практически осталось за пределами книги, если не считать данной в первой части книги интерпретации закона Ома через структуру ранга (2,3). В настоящий момент можно попытаться высказать ряд соображений на этот счет. В частности, выше уже упоминалась связь теории физических структур с многоточечной геометрией В.Я.Скоробогатько. Эта связь относится также к структурам ранга $(r,r\pm1)$. Интересно, что в одном из вариантов многоточечной геометрии В.Я.Скоробогатько предлагает физическую интерпретацию через энтропию и другие понятия статистической физики.

Не следует также забывать о существовании еще одной бинарной физической структуры ранга (4,2). Уже указано несколько проявлений этой структуры в известных закономерностях реального мира, однако еще предстоит выяснить ее роль в построении фундамента теоретической физики.

IV. Наконец, один из авторов этой книги (Ю.И.Кулаков) возлагает большие надежды на *получение* с помощью теории физических структур *значений фундаментальных физических констант.* Указано несколько модельных примеров, наводящих на мысль, как можно было бы приступить к решению такой задачи.

Можно было бы назвать и ряд других проблем, связанных с применением теории структур в физике. Однако и из приведенного здесь перечня видно, насколько широкое поле деятельности открывается здесь для всякого, кого волнуют проблемы фундаментальной теоретической физики.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность всем участникам летних школ по теории физических структур за всестороннее и плодотворное обсуждение проблем, затронутых в этой книге.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Возникновение законов структур в некоторых матричных процессах специального вида

В этой книге были рассмотрены основные идеи и проблемы теории физических структур и бинарной геометрофизики, представляющей девятую парадигму. В третьей части был обсужден еще один круг идей, свидетельствующий в пользу теории физических структур. Очевидно, что развитие теории в рамках какой–то одной парадигмы ни в коем случае не означает объявления ошибочными или исчерпавшими себя теорий из других парадигм. Скорее, наоборот, наличие многих подходов позволяет исследовать физическую реальность с разных сторон, существенно расширяет фронт научных исследований. При этом становится важным наведение мостов между теориями разных парадигм.

В связи с этим здесь хотелось бы обратить внимание на несомненную связь между обсуждающимися в литературе фрагментами теории из четвертой физической парадигмы и физическими структурами. Здесь имеются в виду попытки развития теории в рамках четвертой парадигмы на основе математического аппарата теории комплексных марковских процессов [7, с.126]. О возможности такого подхода свидетельствуют работы В.П.Маслова и его группы [64, 65] по переинтерпретации квантовой теории в терминах комплексных марковских цепей. Ясно, что обсуждавшийся здесь фейнмановский метод квантования также может рассматриваться с позиций цепей Маркова.

Оказывается, довольно общий класс дискретных комплексных матричных процессов Маркова приводит к состояниям систем, для матричных элементов которых имеют место законы структур низшего ранга. Продемонстрируем это на частном примере марковского случайного процесса. Для него эволюция системы характеризуется двумя матрицами: во–первых, матрицей перехода K_{in}, соответствующей вероятности перехода из состояния n в состояние i между двумя соседними моментами времени t, и, во–вторых, матрицей состояния $A_{nm}(t)$. Уравнение эволюции будет иметь следующий вид:

$$A_{nm}(t) = \sum_{n} K_{in} \cdot A_{nm}(t-1),$$

где i, n, m — матричные индексы, принимающие значения в пределах, определяемых размерностью матриц. Известно, что в предположении эргодичности матрицы K_{in}

$$\sum_{i} K_{in} = 1;$$

$$A_{nm}(t)\big|_{t\to\infty} = S_n, \quad \text{где } S_i = \sum_i K_{in} \cdot S_n.$$

Ассимптотическое поведение многих других матричных процессов не исследовано. Не преследуя цели получить общий результат для произвольного матричного процесса, рассмотрим один простой и, вместе с тем, содержательный случай:

$$A_{nm}(t) = \alpha \cdot \sum_k A_{nk}(t-1) \cdot A_{km}(t-1); \tag{П.1}$$

где α — нормирующий коэффициент:

$$\alpha = \left(\sum_{n,k} \left(A_{nk}(t-1) \right)^2 \right)^{-1}, \tag{П.2}$$

введеный для удобства моделирования. Наличие нормирующего коэффициента, по существу, означает введение класса эквивалентности для матриц, отличающихся множителем, и рассмотрение эволюции в проективном матричном пространстве.

Отметим некоторые свойства матричного процесса (П.1).

1. Блочные матрицы вида:

$$A_{nm}(t) = \begin{pmatrix} B_{nm}(t) & 0 & 0 \\ 0 & B_{nm}(t) & 0 \\ 0 & 0 & B_{nm}(t) \end{pmatrix}$$

сохраняют блочную структуру для произвольного числа шагов t.

2. Имеется бесконечное число стационарных состояний A^s_{nm}, определяемых требованием:

$$A^s_{nm} = \alpha \cdot \sum_k A^s_{nk} \cdot A^s_{km}. \tag{П.3}$$

3. Среди всего множества стационарных состояний следует выделить следующее:

$$A^s_{nm} = \xi_n \eta_m. \tag{П.4}$$

Нетрудно убедиться, что условие стационарности (П.3) выполняется для любых ξ_n и η_m. Кроме того, данное состояние устойчиво, т.е. любая малая флуктуация ε_{nm} не способна вывести стационарное состояние из данного класса матриц. Здесь имеет место своеобразная сходимость к некоторому классу матриц, что можно рассматривать как ассимптотическое поведение данного матричного процесса. Легко показать, что данные результаты справедливы как для ве-

щественных, так и для комплексных матриц. Действительная и мнимая части A^s_{nm} в этом случае будут иметь следующий вид:

$$\mathrm{Re}(A^s_{nm}) = \mathrm{Re}(\xi_n) \cdot \mathrm{Re}(\eta_m) - \mathrm{Im}(\xi_n) \cdot \mathrm{Im}(\eta_m); \qquad (П.5)$$

$$\mathrm{Im}(A^s_{nm}) = \mathrm{Re}(\xi_n) \cdot \mathrm{Im}(\eta_m) + \mathrm{Im}(\xi_n) \cdot \mathrm{Re}(\eta_m). \qquad (П.6)$$

Модуль $\left|A^s_{nm}\right|$ записывается в виде:

$$\left|A^s_{nm}\right| = \left|\xi_n\right| \cdot \left|\eta_m\right|. \qquad (П.7)$$

Нетрудно убедиться, что для произвольных (i, k, j) и (a, b, c) определители (3×3) вида:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Re}(A^s_{ia}) & \mathrm{Re}(A^s_{ib}) & \mathrm{Re}(A^s_{ic}) \\ \mathrm{Re}(A^s_{ka}) & \mathrm{Re}(A^s_{kb}) & \mathrm{Re}(A^s_{kc}) \\ \mathrm{Re}(a^s_{ja}) & \mathrm{Re}(A^s_{jb}) & \mathrm{Re}(A^s_{jc}) \end{vmatrix} = 0; \qquad (П.8)$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Im}(A^s_{ia}) & \mathrm{Im}(A^s_{ib}) & \mathrm{Im}(A^s_{ic}) \\ \mathrm{Im}(A^s_{ka}) & \mathrm{Im}(A^s_{kb}) & \mathrm{Im}(A^s_{kc}) \\ \mathrm{Im}(a^s_{ja}) & \mathrm{Im}(A^s_{jb}) & \mathrm{Im}(A^s_{jc}) \end{vmatrix} = 0, \qquad (П.9)$$

где $\mathrm{Re}(A^s_{ia})$ — действительные, $\mathrm{Im}(A^s_{ia})$ — мнимые части соответствующих компонент предельной матрицы A^s_{ia}, тождественно обращаются в ноль, что соответствует закону структуры ранга (3,3;б). Кроме того, обращается в ноль определитель (2×2), построенный из модулей соответствующих компонент матрицы

$$\begin{vmatrix} |A^s_{ia}| & |A^s_{ib}| \\ |A^s_{ja}| & |A^s_{jb}| \end{vmatrix} = 0, \qquad (П.10)$$

что соответствует закону структуры ранга (2,2;б).

Данное замечание может оказаться полезным для установления связи между теорией в рамках четвертой парадигмы и бинарной геометрофизикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур /С дополнением Г.Г.Михайличенко.— Новосибирск: Изд–во Новосиб. ун–та, 1968.— 227 с.

2. Михайличенко Г.Г. Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона: Дис... канд. физ.–мат. наук.— Новосибирск, 1973.— 138с.

3. Лев В.Х. Бинарная физическая структура ранга (3,3)// Вычислительные системы.— Новосибирск: Изд-во Ин–та математики Сиб. отд–ния АН СССР, 1984.— Вып. 101.— С. 91—113.

4. Владимиров Ю.С. Аксиоматизация свойств пространства–времени общей теории относительности // Современные проблемы гравитации.— Тбилиси: Изд–во Тбилис. ун–та, 1967.— С. 407-412.

5. Владимиров Ю.С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий.— М.: Изд-во Моск. ун–та, 1987.— 216 с.

6. Владимиров Ю.С. Пространство–время: явные и скрытые размерности.— М.: Наука, 1989.— 192 с.

7. Владимиров Ю.С., Турыгин А.Ю. Теория прямого межчастичного взаимодействия.— М.: Энергоатомиздат, 1986.— 134 с.

8. Владимиров Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга (3,3) // Вычислительные системы.— Новосибирск: Изд–во Ин–та математики Сиб. отд–ния АН СССР, 1988.— Вып. 125.— С. 42—60.

9. Владимиров Ю.С. Описание взаимодействий в рамках теории бинарных физических структур // Там же.— С. 61—87.

10. Карнаухов А.В. Интегралы по траекториям для частиц со спином 1/2 в фазовом пространстве.— Деп. в ВИНИТИ, №7720—В85, 1985.

11. Кулаков Ю.И. К теории физических структур.— Новосибирск: Изд–во Новосиб. ун–та, 1968.— 226 с.

12. Бурбаки Н. Очерки по истории математики.— М.: Изд-во иностр. лит–ры, 1963.— С. 252.

13. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии.— М.: Наука, 1970.— С. 7—8.

14. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория групп и квантовые поля.— М.: Наука, 1977.

15. Кулаков Ю.И. О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа // Докл. АН СССР.— 1971.— Т. 201, №3.— С. 570—572.

16. Kulakov Ju.I., Protasiewicz T.I. Phenomenological Symmetry and the Foundations of Physics // Intern. Logic Review (Italy).— 1973, №7.— P. 98—101.

17. Физический энциклопедический словарь / Под ред. А.М. Прохорова.— М., 1984.— С. 392, 677, 220.

18. Кулаков Ю.И., Сычева Л.С. Теория физических структур как программа обоснования физики и как исследовательская программа в математике // Исследовательские программы в современной науке.— Новосибирск: Наука, 1987.— С. 99—120.

19. Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи.— М., 1959.— С. 16—19.

20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика.— М.: Наука, 1988.— С. 16.

21. Пуанкаре А. Идеи Герца в механике //Г.Герц. Принципы механики, изложенные в новой связи.— М., 1959.— С. 311, 316.

22. Кулаков Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. мат. журн.— 1971.— Т. 12, №5.— С. 1142—1144.

23. Михайличенко Г.Г. Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными // Укр. физич. журн.—1973.— Т. 25, №5.— С. 589—598.

24. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР.— 1972.— Т.206, №5.— С. 1056—1058.

25. Михайличенко Г.Г. Бинарная физическая структура ранга (3,2) // Сиб. мат. журн.— 1973.— Т. 14, №5.— С.1057—1064.

26. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. М.: Изд–во иностр. лит–ры, 1955.— С. 13.

27. Salmon G. Modern Higher Algebra.— Dublin, 1885.— P. 27.

28. Blumenthal L.M. Theory and applications of distance geometry.— Oxford, 1953.— P. 348.

29. Синг Дж. Общая теория относительности.— М.: Изд–во иностр. лит–ры, 1963.— С. 343.

30. Вайнберг С. Гравитация и космология.— М.: Мир, 1975.— С. 18.

31. Михайличенко Г.Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур // Ю.И. Кулаков. Элементы теории физических структур.— Новосибирск: Изд–во Новосиб. ун–та, 1968.— С. 200—205.

32. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 260, №4.— С. 803—805.

33. Mikhaylitchenko G.G. Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques.— C.R. Acad. Sc. Paris.— 1981.— Vol. 293, Ser. 1.— P. 529—531.

34. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур //Вычислительные системы.— Новосибирск: Изд-во Ин-та математики Сиб. отд-ния АН СССР, 1988.— Вып. 125.— С. 90—103.

35. Кулаков Ю.И. О теории физических структур // Зап. науч. семинаров ЛОМИ / Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. Ленингр. отд-ние.— 1983.— Т. 127.— С. 103—151.

36. Кулаков Ю.И. Новая формулировка теории физических структур // Вычислительные системы.— Новосибирск: Изд-во Ин-та математики Сиб. отд-ния АН СССР, 1988.— Вып. 125.— С. 3—32.

37. Самохвалов К.Ф. К обоснованию теории физических структур // Там же.— С. 3—32.

38. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств.— М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.

39. Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Пер. с англ., нем., фр.— М.: Мир, 1979.

40. Румер Ю.Б. Спинорный анализ.— М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.

41. Пименов Р.И. Пространства кинематического типа. (Математическая теория пространства-времени).— Л.: Наука, 1968.

42. Арифов Л.Я. Общая теория относительности и тяготение.— Ташкент: Изд-во Фан, 1978.

43. Фейнман Р. Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике // Вопросы причинности в квантовой механике: Пер. с англ.— М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955.— С.167—207.

44. Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Композиция бинарных структур и фейнмановский динамический принцип для фермионов // Гравитация и электромагнетизм.— Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1989.— С. 34—50.

45. Пенроуз Р. Структура пространства-времени: Пер. с англ.— М.: Мир, 1972.

46. Окунь Л.Б. Физика элементарных частиц.— М.: Наука, 1984.

47. Фок В.А. Атом водорода и неевклидова геометрия // Изв. АН СССР.— 1935.— Т. 2.— С. 169—184.

48. Coquereaux R. // Phys.Rev.— 1982.— Vol. 115B, №5,— P. 389—395.

49. Владимиров Ю.С. К развитию учения о пространстве и времени // История и методология естественных наук. (Физика).— Вып. 26.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.— С. 76—90.

50. Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная: Пер. с англ.— М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.

51. Мах Э. Познание и заблуждение.— М.: Изд-во С.Скирмунта, 1909.

52. Фейнман Р. Характер физических законов.— М.: Мир, 1968.
53.Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М.: Мир, 1968.— 382 с.
54. DeWitt B.S. Dynamical theory in curved spaces //Rev. Mod.Phys.— 1957.— Vol.29.— P. 377—397.
55. Вилковыский Г.А. О квантовании частицы во внешнем гравитационном поле // ТМФ.— 1971.— Т. 8, № 3.— С. 359—368.
56. Feynman R., Gell-Mann M. Theory of the Fermi interaction // Phys.Rev.— 1957.— Vol. 109.— P. 193—198.
57. Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Многомерные теории и интеграл по траекториям для частиц со спином 1/2 // Изв. ВУЗов (Физика).— 1987.— № 3.— С. 49—54.
58. Miura T. Relativistic path integrals // Progr. Theor. Phys.— 1979.— Vol. 61, №5.— P. 1521—1535.
59. Miura T. Covariant Schrodinger equation via path integrals // Progr.Theor.Phys.— 1981.— Vol. 66, №2.— P. 672—684.
60. Карнаухов А.В. Время как параметр эволюции в континуальном интеграле для релятивистской частицы со спином 1/2.— Деп. в ВИНИТИ №7374 — В86, 1986.
61. Карнаухов А.В. Фейнмановское квантование спинорной частицы в рамках теории типа Калуцы-Клейна // Материалы VП Всесоюз. гравитационной конф.— Ереван: Изд-во Ереванского гос. ун-та, 1988.— С. 290—291.
62. Пташник Б.И., Скоробогатько В. Некоторые идеи и результаты Львовской математической школы в области ветвящихся цепных дробей и дифференциальных уравнений.— Львов, 1989.— С. 9—12.— (Препр. / АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики; №27—88) .
63. Скоробогатько В.Я., Фешин Г.Н., Пелых В.А. N-точечная геометрия типа Евклида // Математические методы и физико-механические поля: Респ. межвед. сб.— Киев: Наукова думка, 1975.— Вып. 1.— С. 5—10.
64. Маслов В.П. Определение комплексных марковских цепей и вывод уравнения Шредингера // Докл. АН СССР.— 1970.— Т. 192, №2.— С. 272—275.
65. Белов В.В., Маслов В.П. Теория возмущений комплексных марковских цепей // Приложение к кн.: Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов.— М.: Высшая школа, 1976.— С. 392.

В издательстве "Архимед" готовится к печати Ю.С. Владимирова "Фундаментальная физика, геометрия и религия".

Книга доктора физико-математических наук, ведущего научного сотрудника МГУ Ю.С. Владимирова посвящена обсуждению соотношения фундаментальной физики и религии. Исходя из анализа понимания религии и Бога видными естествоиспытателями и физиками в книге предлагается обобщенное определение религии. Обосновывается тезис, что физические парадигмы, определяющие характер видения физического мира, представляют собой не что иное как своеобразные физические религии. В них имеются аналоги ключевых понятий и представлений обычных (духовых) религий. В частности, роль Бога в ряде физических парадигм выполняет пространство-время. Подробно проанализирована одеология существующих десяти типов парадигм современной теоретической физики и произведено их сравнение с представлениями различных духовных религий. Особое внимание уделено анализу идей и основных понятий бинарной геометрофизики - разработанной автором единой теории пространственно-временных отношений и физических взаимодействий - как одной из физических парадигм (религий).

Подписано в печать 27.03.92 г. Объем 11.75 п.л.
Тираж 3000 Зак. 706
Типография ОХО Миннефтегазпрома

Ю.И.Кулаков, Ю.С.Владимиров, А.В.Карнаухов